

## سری هفتم تمرینات

مدرس: دکتر بحرینی، دکتر جعفری

دستیاران آموزشی: مسعود بیرامی، علی آل درویش

## تمرین ۱

تبدیل لاپلاس توابع داده شده را محاسبه کنید. سعی کنید در این محاسبه به جای استفاده مستقیم از تعریف، تا جای ممکن توابع را بصورت توابع شناخته شده در جدول لاپلاس تبدیل کنید و سپس تبدیل لاپلاس آن‌ها را محاسبه کنید. در آخر هر یک از توابع داده شده را رسم کنید.

(آ)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

(ب)

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$f(t) = |\sin(t)| \quad t \geq 0 \quad (\text{ج})$$

## تمرین ۲

در هر یک از موارد ابتدا لاپلاس معکوس هر یک را حساب کنید و سپس جواب به دست آمده را رسم کنید.

$$\frac{e^{-s}}{s^2 + 3s + 2} \quad (\text{آ})$$

$$\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} \quad (\text{ب})$$

### تمرین ۳

تابع موج مربعی که به فرم زیر می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 2n \leq t \leq 2n+1 \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

(آ) با استفاده از تعریف بصورت مستقیم تبدیل لاپلاس آن را حساب کنید.

(ب) تابع  $f(t)$  را بصورت سری نامتناهی از توابع بنویسید و لاپلاس هر یک از جملات آن را حساب کنید و سپس جمع کنید.

### تمرین ۴

با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید که در آن:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$y'' + 2y' + 2y = h(t) \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

در آخر جواب به دست آمده را به فرمت تابع  $h(t)$  بنویسید.

### تمرین ۵

نشان دهید اگر  $f(t)$  یک تابع متناوب با تناوب  $c$  باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن بصورت

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-cs}} \int_0^c e^{-cs} f(t) dt$$

می‌باشد. در ادامه تمرین سه را با استفاده از فرمول حل کنید.

### تمرین ۶

با استفاده از پیچش  $\mathcal{L}^{-1}$  هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{s}{(s+1)(s^2+4)} \quad \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

(جواب نهایی نباید بصورت انتگرال پیچش باشد)

**تمرین ۷**

با استفاده از تبدیل لاپلاس و پیچش نشان دهید که مساله مقدار اولیه

$$y'' + k^2 y = r(t) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

دارای جوابی بصورت  $y(t) = \frac{1}{k} \int_0^t r(u) \sin(k - u) du$

**تمرین ۸**

با استفاده از تغییر متغیر و تعریف انتگرال پیچش نشان دهید که  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

**تمرین ۹**

با استفاده از تبدیل لاپلاس و پیچش نشان دهید که مساله مقدار اولیه زیر

$$y'' + ay' + by = r(t) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

دارای جوابی بصورت  $y(t) = \int_0^t w(t - u)r(u)du$  می باشد که  $w(t)$  جواب مساله مقدار اولیه

$$y'' + ay' + by = 0 \quad y(0) = y'(0) = 0$$

می باشد. تابع  $w(t - u)$  تابع گرین<sup>۱</sup> اپراتور خطی  $D^2 + aD + b$  می گویند. ( $a$  و  $b$  ثابت می باشند).

---

<sup>۱</sup>Green function