معادلات دیفرانسیل (زمستان ۹۹)

سری دهم تمرینات

مدرس: دکتر بحرینی، دکتر جعفری دستیاران آموزشی: مسعود بیرامی، علی آل‌درویش

تمرین ۱

نقاط بحرانی هریک از دستگاه‌های غیرخطی و خودگردان زیر را پیدا کنید.

$$x' = x^۲ - y^۲ \qquad x' = ۱ - x + y$$
$$y' = x - xy \qquad y' = y + ۲x^۲$$

تمرین ۲

معادلات زیر را بصورت دستگاه مرتبه اول معادل آن بنویسید و سپس نقاط بحرانی را حساب کنید.

$$x'' + a(x^۲ - ۱)x' + x = ۰ \qquad x'' - x' + ۱ - x^۲ = ۰$$

تمرین ۳

در حالت کلی در مورد رابطه نقاط بحرانی و مدارهای سیستم نوشته شده در سمت چپ و دو سیستم سمت راست چه می‌توان گفت؟

$$x' = f(x,y) \qquad x' = -f(x,y) \qquad x' = g(x,y)$$
$$y' = g(x,y) \qquad y' = -g(x,y) \qquad y' = -f(x,y)$$

تمرین ۴

به فرض $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ جواب معادله دیفرانسیل

$$x' = f(x,y)$$
$$y' = g(x,y)$$

باشد.

آ) نشان دهید اگر $X_1(t)$ جواب دستگاه باشد، آنگاه $X_2(t) = X_1(t - t_0)$ نیز جواب دستگاه است. رابطه هندسی بین این دو جواب چیست؟

ب) قضیه وجود و یکتایی به ما می‌گوید در صورت پیوستگی مشتق دو تابع f و g یک و تنها یک جواب مانند $X(t)$ وجود دارد که $X(t_0) = X_0$ با استفاده از قسمت قبل نشان دهید که مدارها همدیگر را قطع نمی‌کنند. (توجه کنید که اگر مدارها همدیگر را در نقطه (a, b) قطع کنند، آنگاه دو جواب فوق در زمان‌های متفاوت به این نقطه می‌رسند. قسمت قبل به ما کمک میکند که این مشکل را حل کنیم.))

تمرین ۵

دستگاه $x' = Ax$ را به ازای ماتریس‌های زیر حل کنید.

آ)
$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

ج)
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

د)
$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ه)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تمرین ۶

معادله مرتبه دوم $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ را در نظر بگیرید

آ) آنرا به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل کنید

ب) نشان دهید که رونسکین دو جواب x_1 و x_2 معادله اولیه برابر با رونسکین دو جواب دستگاه (متناظر با همین جواب‌ها) می‌باشد.

تمرین ۷

به فرض $X_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ و $X_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$ دو تابع برداری باشند. ابتدا با استفاده از تعریف نشان دهید مستقل خطی هستند و سپس رونسکین متناظر با آنها را پیدا کنید.

تمرین ۸

به فرض ماتریس مربعی از اندازه دو دارای بردار ویژه های متمایز α_1 و α_2 باشد. با طی کردن مراحل زیر نشان دهید دو تابع $X_1 = \alpha_1 e^{m_1 t}$ و $X_2 = \alpha_2 e^{m_2 t}$ مستقل خطی هستند.

آ) با استفاده از محک دترمینان نشان دهید که این دو جواب مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر α_1 و α_2 مستقل خطی باشند.

ب) آنگاه نشان دهید

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0 \Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$$

(معادله بردار ویژه $(A - m_i I)\alpha_i = 0$ را بصورت $A\alpha_i = m_i\alpha_i$ استفاده کنید.)

تمرین ۹

معادله $x' = Ax$ را که در آن A وارون پذیر است را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر $x(t)$ جواب این معادله باشد که در لحظه $t.$ داشته باشیم $x'(t.) = 0$ آنگاه این جواب متحد با صفر است. حداقل فرض بر روی ماتریس A چه باشد که این نتیجه درست باشد؟ به عنوان مثال آیا A می‌تواند تابعی از t باشد؟

تمرین ۱۰

با طی کردن مراحل زیر مدارهای سیستم زیر را رسم کنید.

$$x' = -x$$
$$y' = -2y$$

آ) با حذف t به معادله $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ برسید، حل کنید و سپس خم‌های آن را رسم کنید.

ب) معادله اولیه را حل کنید، (با مشاهده یا با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر) معادلات مدارها را بصورت $x = x(t), y = y(t)$ به دست آورید. با استفاده از این معادلات جهت حرکت را در قسمت اول مشخص کنید. مدارهای جدیدی که وجود دارند و در قسمت اول موجود نمی‌باشد کدام است؟

ج) چه تعداد مدار مورد نیاز است که یک جواب نوعی را در قسمت اول پوشش دهد. آن را در رسم خود مشخص کنید.

د) اگر سیستم ما بصورت $x' = x, y' = ۲y$ باشد. تصویر ما چگونه تغییر می‌کند؟ (هر دو قسمت اول و دوم را در نظر بگیرید)

تمرین ۱۱

تمام مراحل سوال قبل را برای سیستم $x' = y, y' = x$ انجام دهید. (برای قسمت آخر y و x را به عنوان دو تابع سمت راست معادله در نظر بگیرید.)

تمرین ۱۲

سوال ده را با سیستم معادلات $x' = y, y' = -۲x$ انجام دهید. در قسمت دوم جهت حرکت را با استفاده از میدان برداری متناظر با سیستم تعیین کنید.

تمرین ۱۳

برای هریک از سیستم‌های خطی زیر، مراحل زیر را برای رسم آن انجام دهید.

آ) مقادیر ویژه ماتریس‌های متناظر آن را پیدا کنید و سپس شکل هندسی نقطه بحرانی در مبدا و پایداری آن را تعیین کنید.

ب) اگر مقادیر ویژه حقیقی باشد، بردار ویژه‌های متناظر با آن را پیدا کنید و مدارهای متناظر با آنرا بکشید. سپس با گذشت زمان جهت حرکت مدارها را تعیین کنید و چند مدار در همسایگی را رسم کنید.

ج) اگر مقادیر ویژه مختلط باشند،جهت حرکت مدارها را پیدا کنید و سپس با رسم چند بردار از میدان برداری شکل مارپیچی جواب را تعیین کنید.

$$x' = ۲x - ۳y \qquad x' = ۲x \qquad x' = -۲x - ۲y$$
$$y' = x - ۲y \qquad y' = ۳x + y \qquad y' = -x - ۳y$$

$$x' = x - ۲y \qquad x' = x + y$$
$$y' = x + y \qquad y' = -۲x - y$$

تمرین ۱۴

سیستم جرم و فنر با اتلاف بصورت زیر مدل شده است.

$$mx'' + cx' + kx = ۰ \quad m, c, k > ۰$$

آ) سیستم مرتبه اول معادل آن را بنویسید.

ب) در هر یک از موارد زیر، شکل هندسی نقطه بحرانی مبدا و پایداری آن را تعیین کنید. نتایج را شهود فیزیکی مقایسه کنید.

آ) $c = ۰$

ب) $c \simeq ۰, m, k \gg ۱$

ج) آیا مبدا می‌تواند نقطه زینی باشد؟ توضیح دهید.