



ریاضی ۲

تمرینات سری هفتم و هشتم (نیمسال اول ۰۰-۹۹)

سوال ۱ . حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

الف) $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} (4x^2y^3 - x + 5) dA$

ب) $\int \int_{|x|+|y| \leq 1} (x^3 \cos(y^2) + 3 \sin(y) - \pi) dA$

ج) $\int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dA$

چ) $\int \int_S (1 - x - y) dA$ جایی که S مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ است.

ح) $\int \int_S (\frac{x}{y} e^y) dA$ جایی که S ناحیه $0 \leq x \leq 1$ ، $x^2 \leq y \leq x$ است.

خ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\sin(x)}{x}) dA$

د) $\int_x^1 \int_x^1 (\frac{y^\lambda}{x^2 + y^2}) dA$ جایی که $\lambda > 0$

سوال ۲ . حجم جسم های زیر را با استفاده از انتگرال دو گانه به دست آورید.

الف) زیر رویه $z = 1 - x^2 - y^2$ و بالای ناحیه $x + y \leq 1$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$

ب) زیر رویه $z = 1 - y^2$ و بالای ناحیه $z = x^2$

ج) داخل دو استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و $y^2 + z^2 = a^2$

د) زیر سطح $z = \frac{1}{x+y}$ و بالای ناحیه در صفحه xy و کراندار به $x = 1$ ، $x = 2$ و

$$y = x, y = 0$$

سوال ۳ . درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy dx = \frac{16}{\pi^3}$$

سوال ۴ . فرض کنید $f(x, t)$ و $f_x(x, t)$ روی بازه $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ پیوسته هستند. تعریف می کنیم :

$$g(x) := \int_c^d (f(x, t)) dt \quad G(x) := \int_c^d (f_x(x, t)) dt$$

ثابت کنید روی $a \leq x \leq b$ $g'(x) = G(x)$

سوال ۵ . مقدار انتگرال های ناسره زیر را حساب کنید.

الف) $\int \int_{R^2} (e^{-(|x|+|y|)}) dA$

ب) $\int \int_T \left(\frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x^3}\right) dA$ که در آن T ناحیه $1 \leq x, 0 \leq y \leq x$ است.

سوال ۶ . آیا تابع $f(x, y) = x$ روی ناحیه $0 < y < \frac{1}{1-x^2}, 0 \leq x < \infty$ مقدار میانگین دارد؟ اگر جواب مثبت است آن را پیدا کنید.

سوال ۷ . به ازای کدام مقدار k ، انتگرال زیر همگراست؟

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^k}\right) dA$$

سوال ۸ . حجم بین نواحی زیر را به دست آورید. (با استفاده از مختصات قطبی)

الف) $x^2 + y^2 = ax$ و $z^2 + x^2 + y^2 = a^2$

ب) $z = x^2 + y^2$ و $3z = 4 - x^2 - y^2$

سوال ۹ . نشان دهید اگر $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ، آن گاه:

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

با یک محاسبه در مختصات قطبی نتیجه بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

سوال ۱۰ . الف) حاصل انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-2}^0 \left\{ \int_0^{x+2} \frac{e^{x^2+y^2}}{e^{2xy}} dy \right\} dx.$$

(راهنمایی: قرار دهید $x - y = u$ و $x = v$.)

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 \left\{ \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{y}{2}}^1 z e^{\frac{z}{x}} dx \right\} dz \right\} dy.$$

سوال ۱۱ . حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

الف) $\int \int \int_{R^3} (e^{-x^2-2y^2-3z^2}) dV$

ب) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_y^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)} dz dy dx$

ج) $\int \int \int_B (z) dV$ که در آن B ناحیه $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$ می باشد.

د) $\int \int \int_B (x^2 + y^2 + z^2) dV$ که در آن B استوانه $x^2 + y^2 \leq a^2$ ، $0 \leq z \leq h$ است.

سوال ۱۲ . حجم اجسام داده شده را با استفاده از انتگرال سه گانه به دست آورید.

الف) ناحیه واقع در داخل استوانه $x^2 + 4y^2 = 4$ ، بالای صفحه xy و پایین صفحه

$$z = x + 2$$

ب) داخل بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ و بالای صفحه $z = b - y$

سوال ۱۳ . مختصات مرکز جرم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ که در مختصات استوانه‌ای

بین صفحات $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\theta = -\frac{\pi}{4}$ است را بدست آورید.

سوال ۱۴ مرکزوار ناحیه $x \geq 0$ را زمانی که تابع چگالی در نقطه (x, y) برابر است با $\delta(x, y) =$

$e^{-x^2-y^2}$ است، بدست آورید.

سوال ۱۵ . ابتدا نشان دهید:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

سپس با دوران ناحیه انتگرال گیری $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ به

اندازه ۴۵ درجه نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$