تمرینات سری پنجم و ششم (نیمسال اول ۰۰ـ۹۹) ریاضی ۲

سوال ۱ . فرض کنید تابع حقیقی مقدار f روی $\mathbb{R}^3$ بدین‌صورت تعریف شده باشد: f در مبدأ مختصات برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ مختصات با ضابطهٔ $f(x,y,z) = \dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}$ تعریف شده است. پیوستگی f در مبدأ مختصات را بررسی کنید. همچنین مشتقات جزئی f را در مبدأ مختصات محاسبه کنید. آیا توابع $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ در مبدأ مختصات پیوسته می‌باشند؟

سوال ۲ . (الف) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = xyz$ را روی منحنی فصل مشترک دو رویه $x^2+z^2=1$ و $y^2+z^2=1$ بدست آورید.

(ب) ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y,z) = -x+y+2z+4$ را بر ناحیه زیر بدست آورید:

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+4z^2+2x-8z \leq 11\Big\}.$$

(ج) مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع $f(x_1,\cdots,x_n) = x_1+\cdots+x_n$ و $g(x_1,\cdots,x_n) = x_1+2x_2+\cdots+nx_n$ را بر روی کره $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ بدست آورید.

سوال ۳ . در تابع $f(x,y,z) = axy^2+byz+cz^2x^3$ ثابت‌های a,b,c را به‌قسمی تعیین کنید که ماگزیمم مشتق سویی آن در نقطهٔ $(1,2,-1)$ در جهت موازی محور zها باشد و مقدار آن ۶۴ باشد.

$\boxed{\text{سوال ۴}}$. نشان دهید در نزدیکی نقطهٔ $(x,y) = (۱,۱)$ می‌توان z را بر حسب تابعی از x,y چنان بیان نمود که $z(۱,۱) = ۰$ و رابطهٔ زیر برای هر (x,y) به‌قدر کافی نزدیک به $(۱,۱)$ برقرار باشد:

$$\ln(xy) + ۲e^{\frac{z}{x}} - x^۲y + x + z - ۲ = ۰.$$

نشان دهید نقطهٔ $(۱,۱)$ برای z یک نقطه بحرانی می‌باشد و نوع این نقطهٔ بحرانی را مشخص کنید.

$\boxed{\text{سوال ۵}}$. نشان دهید که در همسایگی نقطهٔ $x = ۰$ می‌توان y را به‌عنوان تابعی از x چنان در نظر گرفت که $y(۰) = ۰$ و به‌ازای xهای به‌قدر کافی نزدیک به صفر رابطهٔ $x\sin y(x) = y(x) + \sin x$ برقرار باشد. سه جملهٔ اول مخالف صفر سری تیلور $y(x)$ حول صفر را بیابید.

$\boxed{\text{سوال ۶}}$. با ترکیب روابط زیر، متغیر z تابعی از متغیرهای t و u و s می باشد. برای این تابع $\frac{\partial z}{\partial u}$ را با استفاده از قاعده زنجیره ای (نه به دست آوردن رابطه z بر حسب t,u,s) را در نقطه $(t,u,s) = (۰,۱,-۱)$ به دست آورید.

$$z = xyu + sin(u + y - ۳)$$

$$x = cos(s + u) + s + y^۲$$

$$y = t^۲ + u^۲ + e^t$$

$\boxed{\text{سوال ۷}}$. فرض کنید $z = f(x,y)$ اگر $x = s + \frac{۱}{t}$ و $y = s + t$ عبارت $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ را بر حسب مشتق های z نسبت به متغیرهای s و t به دست آورید.

$\boxed{\text{سوال ۸}}$. نگاشت $z = z(x,y)$ در رابطه $z^۳ - ۲xz + y = ۰$ صدق می کند که در آن $z(۱,۱) = ۱$ می باشد. چند جمله ای تیلور مرتبه دوم z در نقطه $(۱,۱)$ را محاسبه کنید.

سوال ۹ . فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر با این ویژگی باشد که در هر نقطه در $\mathbb{R}^2$ طول بردار گرادیان f برابر با $\sqrt{2}$ است.فرض کنید تابع حقیقی مقدار g روی $\mathbb{R}^2$ توسط رابطه $g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$ تعریف شده باشد.اعداد حقیقی a,b را به قسمی بیابید که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$a(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y))^2-b(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y))^2=x^2+y^2$$

سوال ۱۰ فرض کنید f,g توابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر باشند که روی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده اند.میگوییم f,g بطور تابعی به یکدیگر وابسته هستند هر گاه تابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر روی $\mathbb{R}$ مانند $k(t)$ به قسمی موجود باشد که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x,y)=k(g(x,y))$.نشان دهید اگر f,g وابسته تابعی باشند آنگاه دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با تناظر $(x,y)\to(f(x,y),g(x,y))$ برابر با صفر می باشد.
حال فرض کنید f,g توابعی از کلاس C^1 روی $\mathbb{R}^2$ باشند و $\frac{\partial g}{\partial y}$ هیچ جا صفر نشود.در این حالت نشان دهید اگر دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با نگاشت $(x,y)\to(f(x,y),g(x,y))$ متحد با صفر باشد آنگاه f,g بطور موضعی وابسته تابعی می باشند.

سوال ۱۱ . نگاشت $z=z(x,y)$ در رابطه $f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$ صدق می کند.مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ بر حسب x,y,z و مشتقات f در صورتی که $\frac{\partial f}{\partial x}+2z\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$

سوال ۱۲ . معادله $f(x,y,z)=0$ را در نظر بگیرید که نقطه p در آن صدق می کند و رابطه $\frac{\partial f}{\partial x}(p),\frac{\partial f}{\partial y}(p),\frac{\partial f}{\partial z}(p)\neq 0$ برای آن برقرار است. پس در همسایگی از p ،یک متغیر را می توان بر حسب دو متغیر دیگر بیان کرد. فرض کنید $z=z(x,y)$ در معادله $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=0$ صدق می کند. نشان دهید نگاشتهای $x=x(y,z)$ و $y=y(x,z)$ نیز در معادله ای مشابه صدق می کنند.(یعنی نقش های x,y,z عوض می شود.)

سوال ۱۳ . مکعبی به اضلاع واحد را در نظر بگیرید که در یک وجه آن دایره ای محاط شده و در یکی از وجه های کناری(وجه مذکور) دایره ای محیط شده است. ماکزیمم و مینیمم فاصله دو دایره را نسبت به هم به دست آورید.

سوال ۱۴ . سطح تراز $(\sqrt{x^2+z^2}-a)^2+y^2=b^2$ $(b<<a)$ و نگاشت $g(x,y,z)=z$ را روی این سطح تراز در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از ضرایب لاگرانژ نقاط کاندید برای ماکزیمم و مینیمم را به دست آورید.

ب) پارامتری سازی $h(\theta,\varphi)=(\quad (a+bcos\theta)cos\varphi\,,\,(a+bcos\theta)sin\varphi\,,\,bsin\theta \quad)$ را برای سطح تراز مذکور در نظر بگیرید. نقاط بحرانی نگاشت goh را به دست آورده و نوع آن را مشخص کنید.

ج) با محاسبه تحقیق کنید چرا تصویر نقاط بحرانی در قسمت ب توسط نگاشت h ، همان مجموعه نقاط حاصل در قسمت الف است.