تمرینات سری سوم و چهارم (نیمسال اول ۰۰ـ۹۹) **ریاضی ۲**

سوال ۱ . نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x,y) = |x| + |y|$

ب) $f(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$

سوال ۲ . معادله صفحه مماس و خط قائم به نمودار تابع $f(x,y) = ye^{-x^۲}$ را در نقطه $(۰,۱)$ بیابید.

سوال ۳ . وجود حد را در توابع زیر بررسی کنید.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \dfrac{sin(xy)}{(x^۲ + y^۲)}$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۱)} \dfrac{x^۲(y-۱)^۲}{(x^۲ + (y-۱)^۲)}$

سوال ۴ . چه شرایطی باید بر اعداد صحیح نامنفی m و n و p بگذاریم تاوجود حد زیر تضمین شود.

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^m y^n}{(x^۲ + y^۲)^p}$$

سوال ۵ . آیا می‌توان تابع زیر را در نقطه $(۰,۰)$ به‌قسمی تعریف نمود که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟

$$f(x,y) = \frac{(\sin x)(\sin^۳ y)}{۱ - \cos(x^۲ + y^۲)}.$$

در صورت ممکن بودن این امر مقدار تابع در $(۰,۰)$ را بیابید.

سوال ۶ . فرض کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y) \neq (\circ,\circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ,\circ) \end{cases}$$

الف) وجود پیوستگی و مشتقات جزیی را در نقطه مبدا بررسی کرده و در این نقطه گرادیان را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی، $\nabla_u f(\circ,\circ)$ را که در آن $u = \dfrac{i+j}{\sqrt{۲}}$ حساب کنید.

ج) آیا تابع در مبدا مشتق پذیر است؟

سوال ۷ . ثابت کنید اگر $f(x,y)$ در (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه در (a,b) پیوسته است.

سوال ۸ . نشان دهید که معادله $x + ۲y + z + e^{۲z} = ۱$ در همسایگی $(x,y) = (\circ,\circ)$ دارای جوابی بصورت $z = f(x,y)$ می باشد که در رابطه $f(\circ,\circ) = \circ$ صدق می کند.چند جمله ای تیلور درجه دوم f را حول مبدا بیابید.

سوال ۹ . فرض کنید تابع حقیقی مقدار دو متغیره $f(x,y)$ بر روی قرص $\circ \leq x^۲ + y^۲ < ۱$ تعریف شده باشد.فرض کنید f بر این قرص تابعی مشتق پذیر باشد و در رابطه $\nabla f = \circ$ روی این قرص صدق کند.نشان دهید f روی این قرص تابعی ثابت است.

سوال ۱۰ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در مبدأ برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ با ضابطه $f(x,y) = \dfrac{۲xy}{x^۲+y^۲}$ تعریف شده باشد. نشان دهید f در مبدأ پیوسته نمی‌باشد. لیکن مشتق‌های جزئی f در مبدأ وجود دارند.

سوال ۱۱ . فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^۲$ باشد که در مبدا مختصات برابر با صفر و در غیر از مبدا با ضابطه $f(x,y) = xy\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ تعریف شده باشد.مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ و $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}$ در نقطه $(\circ,\circ)$.آیا این دو مقدار برابر هستند؟

سوال ۱۲ (الف) نشان دهید که می توان دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} xy^{۲} + zu + v^{۲} = ۳ \\ x^{۳}z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x, y, z, u, v) = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ نسبت به **مجهولات** x, y, z بر حسب توابعی از u, v حل نمود و سپس مستق های جزئی x, y, z را نسبت به u, v در نقطه $(۱, ۱)$ بیابید.همچنین در نقطه $(۱, ۱)$ مطلوبست یافتن $\frac{\partial^{۲} z}{\partial v^{۲}}$.

سوال ۱۳ . تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ در مبدأ برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ با ضابطهٔ $f(x,y)=\frac{۲x^۲y}{x^۴+y^۲}$ تعریف شده است. نشان دهید f در مبدأ پیوسته نیست. لیکن برای هر بردار یکهٔ $r=u\vec{i}+v\vec{j}$ مشتق سویی f در راستای r وجود دارد. به‌ازای چنین r بیان شده‌ای یک رابطه برای به‌دست آوردن مشتق سویی f در راستای r ارائه نمایید.

سوال ۱۴ . نگاشت $U=f(x,y,z,t)$ دارای مشتقات پاره‌ای دوم پیوسته است و $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ بردارهای واحد و دو به دو برهم عمود هستند.نشان دهید:

الف) $$(\frac{\partial U}{\partial L_۱})^۲+(\frac{\partial U}{\partial L_۲})^۲+(\frac{\partial U}{\partial L_۳})^۲=(\frac{\partial U}{\partial x})^۲+(\frac{\partial U}{\partial y})^۲+(\frac{\partial U}{\partial z})^۲$$

ب) $$\frac{\partial^۲ U}{\partial L_۱^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial L_۲^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial L_۳^۲}=\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial z^۲}$$

سوال ۱۵ . نگاشت $f:R^۲\to R$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^x-e^y}{x-y} & x\neq y\\ e^x & x=y\end{cases}$$

الف) در چه نقاطی تابع $f(x,y)$ مشتق پذیر است و در صورت وجود، آن را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از بهترین تقریب توسط عبارت های درجه یک، مقدار تقریبی تابع را در نقطه $(۰.۰۰۲۵,۰.۰۰۳۵)$ حساب کنید.

سوال ۱۶ . الف) بزرگترین ناحیه ای در $R^۲$ را مشخص کنید که بتوان $Log_x(x+y)$ را روی آن تعریف کرد و بررسی کنید که در کدام نقطه از ناحیه مذکور، $Log_x(x+y)$ پیوسته است.

ب) وجود حد نگاشت مذکور را وقتی که $(x,y)\to(۱,۰)$ را بررسی کنید.

سوال ۱۷ . نگاشت $f:R\to R$ دو بار مشتق پذیر است.مستقیما تحقیق کنید نگاشت $U(x,y,z,t)=\frac{f(r-ct)}{r}$ در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial t^۲}=c^۲(\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ U}{\partial z^۲})$$

که در آن $r=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ و $c\in R$ مقدار ثابت است.

سوال ۱۸ . نشان دهید هر صفحه مماس بر رویه $xyz = m^۲$ با صفحات مختصات، هرمی با حجم ثابت می‌سازد.

سوال ۱۹ . U و V را به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی Z^n میگیریم که در آن $Z = x + iy$ است. تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial y^۲} = ۰$$

ب) $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ج) تساوی های قسمت ب را در دستگاه مختصات قطبی، یعنی بر حسب مشتقات پاره‌ای r و Θ بازنویسی کنید.

سوال ۲۰ . با استفاده از مفاهیم و تکنیک های مشتق برای توابع چند متغیره، مشخص کنید موقعیت سه نقطه X و Y و Z روی دایره واحد نسبت به هم چگونه باشد تا مقدار زیر ماکزیمم شود.

$$||X - Y|| + ||X - Z|| + ||Z - Y||$$

سوال ۲۱ . فرض کنید دما در $R^۳$ از قانون $T(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + ۲z^۲$ تبعیت می‌کند.

الف) حشره ای روی کره ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ متر حرکت می‌کند. اگر حشره در زمان $t = ۰$ در مکان $(\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}})$ قرار داشته و اندازه سرعت آن $۵\frac{m}{s}$ باشد، در چه جهتی حرکت کند که بیشترین تغییرات دما را احساس کند.

ب) مسیر حشره دیگری را با $\gamma(t)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم رابطه $\gamma'(t) = \frac{\nabla T}{||\nabla T||^۲}$ برای آن برقرار است. اگر حشره در زمان $t = ۰$ در مکان $(۱, ۰, ۰)$ باشد، ۲۰ ثانیه بعد چه دمایی را احساس می‌کند؟