به نام خدا

سری سوم حل تمرین

درس ریاضی عمومی ۱

پاییز ۹۹

سوال ۱ فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و مشتق پذیر روی بازه (a,b) باشد و $b - a \geq \pi$. ثابت کنید:

$$\exists x \in (a,b) : f'(x) < ۱ + (f(x))^۲.$$

سوال ۲ فرض کنید $a_۰, \dots, a_n$ اعدادی حقیقی باشند که $\frac{a_۰}{n+۱} + \dots + \frac{a_{n-۱}}{۲} + a_n = ۰$. نشان دهید چند جمله ای $a_۰x^n + \dots + a_n$ روی بازه $(۰,۱)$ حداقل یک ریشه دارد.

سوال ۳ اگر تمام ریشه های یک چند جمله ای از درجه $n \geq ۲$ با ضرایب حقیقی مثل $p(x)$، حقیقی باشند، نشان دهید ریشه های $p'(x)$ نیز حقیقی اند.

سوال ۴ فرض کنید f, g دو تابع پیوسته هیچ جا صفر روی بازه $[a,b]$ باشد. اگر $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ نشان دهید :

$$\exists c \in (a,b) : \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}.$$

سوال ۵ فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر دو عدد گویای داده شده $q_۱ < q_۲$ داریم $f(q_۱) < f(q_۲)$. نشان دهید f روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.

سوال ۶ فرض کنید $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $f(۰) = ۱, f(۱) = ۰$. نشان دهید

$$\exists c \in [۰,۱] : f(c) = c^۳.$$

سوال۷ فرض کنید a, b دو عدد حقیقی باشند. نشان دهید:

$$|a \sin\theta + b\cos\theta| \leq \sqrt{a^۲ + b^۲}.$$

سوال۸ فرض کنید $z_۱, z_۲$ دو عدد مختلط و $k > ۰$ عددی حقیقی باشد. نشان دهید:

$$|z_۱ - z_۲|^۲ \leq (۱+k)|z_۱|^۲ + (۱ + \frac{۱}{k})|z_۲|^۲.$$

سوال۹ فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ۴ بار مشتق پذیر باشد و برای یک $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f''(a) = ۰$. اگر عدد حقیقی و مثبت M موجود باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f^{(۴)}(x)| \leq M$ آنگاه ثابت کنید برای هر $h \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|f(a+h) - ۲f(a) + f(a-h)| \leq \frac{Mh^۴}{۱۲}.$$