سوال ۱-
تغییرات رنگ = رنگ ورودی - رنگ خروجی

$x(t)$ نمایشگر مقدار گرم رنگ در هر لیتر باشد. t برحسب دقیقه

$$x'(t) = 2\times 50 - \frac{2x(t)}{200} \Rightarrow x' + \frac{x}{100} = 100$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{t/100} \Rightarrow (x e^{t/100})' = 100 e^{t/100}$$

عامل انتگرال ساز

$$e^{t/100} x = 10^4 e^{t/100} + c \Rightarrow x(t) = 10^4 + c e^{-t/100}$$

از آنجایی که در زمان صفر رنگی وجود ندارد پس $x(0)=0$ ، $c = -10^4$

(۶ نمره)

ب) (۲ نمره)

$$\lim_{t\to\infty} 10^4 - 10^4 e^{-t/100} = 10^4$$

ج) (۲ نمره)

غلظت باندازه نصف

$$10^4 - 10^4 e^{-t/100} = 10^4/2 \Rightarrow e^{-t/100} = 1/2 \qquad \frac{-t}{100} = \mathrm{Ln}(1/2)$$

$$t = 100\,\mathrm{Ln}\,2 \ \text{min}$$

سوال ۲) فرض کنید جواب بصورت $y = z e^{at}$ باشد داریم

$$P(D)y = f(t) \Rightarrow P(D)[e^{at}z] = (D-a)(D-b)[e^{at}z] = f(t)$$

$$e^{at} D(D+a-b)[z] = f(t) \Longrightarrow (D+a-b)[z] = \int e^{-at} f(t)dt + c$$

دو طرف را در e^{-at} ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم

(۵ نمره)

حال فرض کنید که $z = u e^{(b-a)t}$ داریم

$$(D+a-b)[u e^{(b-a)t}] = \int e^{-at} f(t)dt + c$$

$$e^{(b-a)t} D[u] = \int e^{-at} f(t)dt + c$$

$$u = \int e^{(a-b)t}\left\{\int e^{-at} f(t)dt + c\right\} + c'$$

(۵ نمره)

$$u = z e^{(a-b)t} = y e^{(a-b)t} e^{-at} \Leftarrow u = e^{-bt} y$$

(جاگذاری از روابط نهایی حاصل می‌شود)

دو قسمت اول سه نمره و قسمت آخر 4 نمره

پاسخ سوال ۳) در معادله $mx'' + kx = F(t)$

فرکانس طبیعی برابر $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ است

سری فوریه تابع F دارای جملات به صورت

$\sin \frac{\pi n}{L} t$ و $\cos \frac{\pi n}{L} t$ است که $2L$

دوره تناوب F است. پدیده تشدید وقتی رخ می‌دهد

که بتوان n را طوری یافت که $\frac{n\pi}{L} = \omega_0$

a) $L = 1$ ، $\omega_0 = \sqrt{5/2}$

جواب ندارد. $\sqrt{5/2} = n\pi$

b) $L = 1$

$\omega_0 = \pi$

$\frac{n\pi}{1} = \pi \Leftrightarrow n = 1$

c) $L = \pi$

$\omega_0 = 2$

$2 = \frac{n\pi}{\pi} = n \Leftrightarrow n = 2$

سوال ٤ : قرار دهید

آنگاه $W(t) = x_1 x_2' - x_1' x_2$

$$W'(t) = x_1 x_2'' + x_1' x_2' - x_1' x_2' - x_1'' x_2$$

$$= x_1 x_2'' - x_1'' x_2$$

$$= x_1(-3t^2 x_2' - t^3 x_2) - (-3t^2 x_1' - t^3 x_1) x_2$$

$$= -3t^2 (x_1 x_2' - x_1' x_2) = -3t^2 W(t)$$

(۳ نمره)

$$\Rightarrow \frac{W'(t)}{W(t)} = -3t^2 \Rightarrow \ln|W(t)| = -t^3 + C$$

(۵ نمره)

با $t=0$ ،

$$W(0) = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{W(t) = e^{-t^3}}$$

(۲ نمره)

سوال ۵: جواب معادله همگن.

$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$ معادله مشخصه

$(r+2)(r^2-1) = 0 \Longrightarrow r = +1, -1, -2$

e^t, e^{-t}, e^{-2} (3 نمره)

$x = Ce^{-3t}$ جواب خاص

$C(-27+18+3-2)e^{-3t} = e^{-3t}$

$C(-8) = 1 \Longrightarrow C = \frac{-1}{8}$

(3 نمره)

$x = -\frac{1}{8}e^{-3t}$

جواب کلی

$x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + C_3e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-3t}$ (1 نمره)

الف. اگر $x(t) \to 0$ وقتی $t \to \infty$ پس $C_2 = 0$

پس $x(t) = C_1e^{-t} + C_3e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-3t}$ است

$X(0) = C_1 + C_3 - \frac{1}{8} = A$

$X'(0) = -C_1 - 2C_3 + \frac{3}{8} = B$ (3 نمره)

$X''(0) = C_1 + 4C_3 - \frac{9}{8} = C$

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{-2t} - \frac{1}{8} e^{-3t}}$$

اگر $x(t) \to 0$ وقتی $t \to \infty$ $\quad C_2 = 0$

یعنی $\quad x(t) = c_1 e^{-t} + c_3 e^{-2t} - \frac{1}{8} e^{-3t}$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_3 - \frac{1}{8} = A \\ x'(0) = -c_1 - 2c_3 + \frac{3}{8} = B \\ x''(0) = c_1 + 4c_3 - \frac{9}{8} = C \end{cases} \Longrightarrow \quad 8A + 12B + C + 1 = 0$$

سوال ۶) (نوشتن سری فوریه تابع ۵ نمره)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\,dx = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos nx\,dx = \frac{\cos(n\pi)\,(e^{\pi}-e^{-\pi})+0}{\pi\,(1+n^2)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cos nx\,dx = e^{x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int n e^{x}\sin nx\,dx$$

$$= \quad // \quad + n e^{x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int n^2 e^{x}\cos nx\,dx$$

b_n را فعلا حساب نمی‌کنیم

از آنجا که e^{x} را متناوب می‌کنیم، پس در $(2k+1)\pi$ پیوسته نمی‌باشد. طبق قضیه کتاب سری فوریه در آن نقطه به میانگین حد چپ و راست میل می‌کند

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\pi + b_n\underbrace{\sin n\pi}_{0}$$

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}\,(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(1+n^2)\,\pi}$$

$$\sum \frac{1}{(1+n^2)} = \frac{\pi\,(e^{\pi}+e^{-\pi})}{2(e^{\pi}-e^{-\pi})} - \frac{1}{2}$$

(۵ نمره)