$u(t)-u(t-5) \Rightarrow L(f(t)) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$ (1)

(1)

$x''+2x'+10x) = s^2 X(s) + 2s X(s) + 10 X($

(2) با $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ که

$\mathcal{L}(x'') = s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)$

$\mathcal{L}(x') = s X(s) - x(0)$

استفاده کرده ام . بنابراین

$X(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)}(1-e^{-5s})$

$= \left[\frac{1}{10s} - \frac{1}{10}\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right](1-e^{-5s})$

(3) $= \left[\frac{1}{10s} - \frac{1}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - \frac{1}{30}\frac{3}{(s+1)^2+}\right.$

$\cdot [1$

$= -\frac{e^{-5s}}{10s} + \frac{1}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}e^{-5s} + \frac{1}{30}\frac{3}{(s+1)^2+}$

(4) $+ \frac{1}{10s} - \frac{1}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - \frac{1}{30}\frac{3}{(s+1)^2+}$

$$x(t)=\frac{1}{10}-\frac{e^{-t}}{10}\cos 3t-\frac{1}{30}e^{-t}\sin 3t$$

(5)

$$-\frac{1}{10}u(t-5)+\frac{1}{10}e^{-(t-5)}\cos 3(t-5).\,u(\ldots$$

$$+\frac{1}{30}e^{-(t-5)}\sin 3(t-5)\,.\,u(t-\ldots$$

... $t>5$ آنگاه $\frac{1}{10}-\frac{1}{10}u(t-5)=0$ و چون $\cos$, $\sin$

توابعی کراندار هستند و $e^{-t}\to 0$ پس وقتی $t\to+\infty$ آنگاه

(2) $x(t)\to 0$

پس برای $x(t)$ جوابی است که بطور مجانبی پایدار است . و به جواب صفر

برای ~~...~~ $f(x)=0$ ~~...~~ میل می‌کند .

(۳) اگر $x'' + ax' + bx = \delta(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$ آنگاه

$$s^2 X(s) + as\,X(s) + b\,X(s) = 1$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 X(s) + as\,X(s) + b\,X(s) = \mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$$

(5) $$X(s) = \frac{1}{s^2+as+b} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

$$\to \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+as+b}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

(1) $$= \sin t * \cos t$$

$$= \int_0^t \cancel{\cos}\, \sin\tau \cos(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \sin\tau \left(\cos t \cos\tau + \sin t \sin\tau\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\cos t \int_0^t \sin 2\tau \, d\tau + \sin t \int_0^t \sin^2\tau \, d\tau$$

(4) $$= \frac{1}{4}\cos t\left(1 - \cos 2t\right) + \sin t\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos t \cos 2t + \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin t \sin 2t$$

۳ - اگر $X'=AX$ که $X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ و $X(t)$ روی کره به مرکز مبدا باشد یعنی

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)=R^2$$

مشتق می‌گیریم - $2x_1x_1'(t)+2x_2x_2'+2x_3x_3'=0$ $\boxed{\text{۲ نمره}}$

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$$

$$x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3$$

$$x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3$$

جایگذاری ۲ نمره

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2$$

$$+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+(a_{23}+a_{32})x_2x_3=0$$

چون مقدار اولیه $x_1(0)$، $x_2(0)$ و $x_3(0)$ دلخواه است پس عبارت بالا برای هر x_1، x_2 و x_3 صفر می‌شود.

$\boxed{\text{۲ نمره}}$

یعنی باید ضرایب صفر شوند

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0 \qquad a_{ij}=-a_{ji}$$

یعنی

یعنی A باید ماتریس پادمتقارن باشد. این شرط لازم بود $\boxed{\text{۴ نمره}}$

حال اگر A پادمتقارن باشد تساوی‌های بالا برقرار است و رابطه‌ها برگشت‌پذیر است. پس پادمتقارن بودن A شرط کافی نیز هست (۵ نمره)

ب - فرض A پادمتقارن باشد

$$(e^{At})^T=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{t^i\, i!}\right)^T$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(A^i)^T}{t^i\, i!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A^T)^n}{t^n\, n!}$$

$$(A^T)^n=(-A)^n$$

$$=\sum\frac{(-A)^n}{t^n\, n!}=e^{-At}\Rightarrow (e^{At})^Te^{At}=e^{-At}e^{At}=e^0=I$$

(۵ نمره)

④ الف) فرض کنید N نفر واکسینه شوند و بنابراین $\%9N$ نفر ایمنی دارند

در هر زمان t تعداد افراد بیمار، سالم و بدون ایمنی، بهبود یافته کل تعداد

$1000 - \%9N$ را تشکیل می‌شوند پس

$$x + y + z = \frac{1000 - \%9N}{1000} = \text{ثابت}$$

⑤

بنابراین $(x+y+z)' = x' + y' + z' = 0$

ب) از آنجایی که درصد افراد مبتلا باید کم شود پس باید y تابع نزولی باشد

⑤ $$y' = \left(\frac{1}{9}x - \frac{1}{50}\right) y$$

توجه کنید که $x' = -\frac{1}{9}xy$ چون $x, y \geq 0$ پس x تابعی نزولی است

باید $\boxed{\frac{1}{9}x(0) - \frac{1}{50} \leq 0}$ زیرا از آن به بعد چون

⑤ $x(t) < x(0)$ مقدار y' اکیداً منفی می‌شود ولی

$$x(0) = \frac{1000 - 19 - \%9N}{1000} \leq \frac{9}{50}$$

⑤ $$\Rightarrow N \geq 890$$

پس ۸۹۰ نفر باید واکسینه شوند تا اپیدمی متوقف گردد.

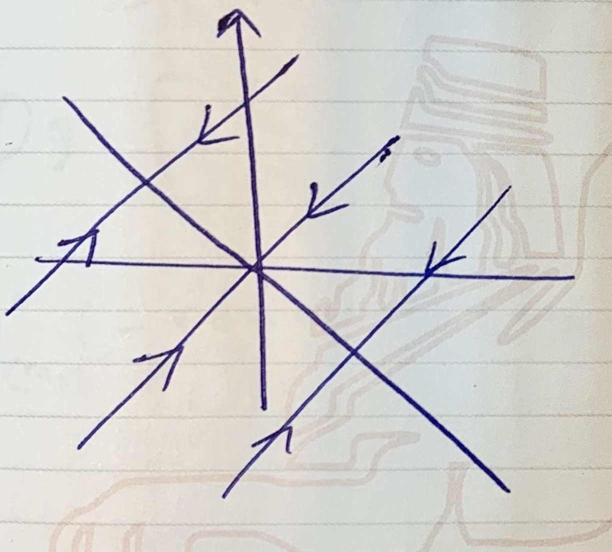
هر مورد ۵ نمره - ۱ نمره تعیین پایداری - ۲ نمره بردار ویژه ها و ۲ نمره کشیدن بردارها و جهت ها

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 1 + 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -2$

بردار ویژه ۰ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ بردار ویژه ۲- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



نقطه پایدار

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $(\lambda - 1)(\lambda + 2) - 1 = 0$

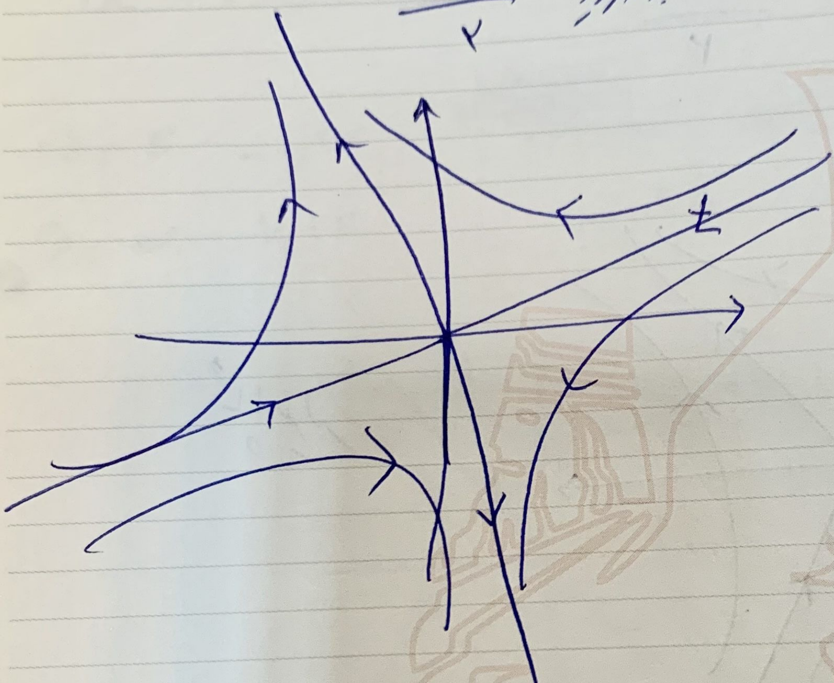
$\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$

$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0$, $\frac{-1+\sqrt{13}}{2} > 0$

$A - \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) I = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$$A-\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)v=0 \qquad \begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} v = 0$$

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ بردار ویژه $v=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix}$



ناپایدار

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)-6=0$$

$$\lambda^2=7 \qquad \lambda=\pm\sqrt{7}$$

$$A-\sqrt{7}\,I=\begin{bmatrix} 1-\sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1-\sqrt{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 = 1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

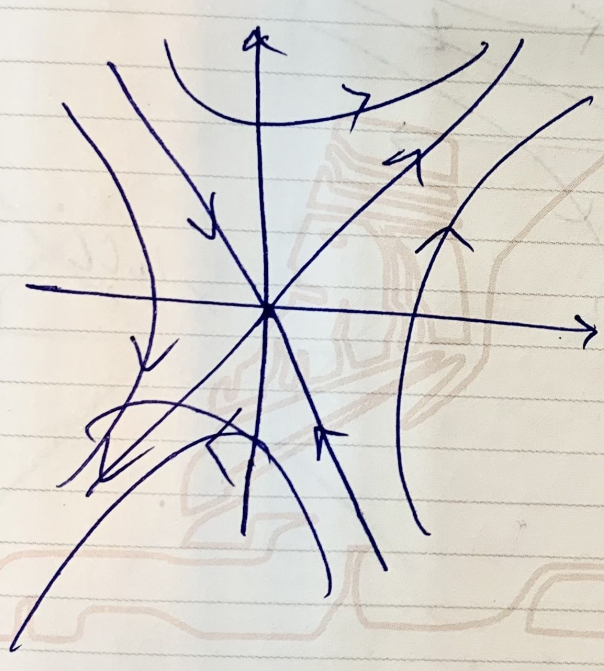
$$(1-\sqrt{7})1+2v_2=0$$

$\sqrt{7}$ بردار ویژه

$$v_2=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

$$A+\sqrt{7}\,I = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 \\ 3 & -1+\sqrt{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = \frac{-\sqrt{7}-1}{2}$$



ناپایدار

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad (\lambda-2)(\lambda-5)-12=0$$

$$\lambda^2-7\lambda-2=0 \qquad \lambda_1,\lambda_2 = \frac{7\pm\sqrt{49+8}}{2}$$

یکی مثبت یکی منفی

حل حالات مختلف

دانشجو باید نوشته باشد

۶) الف) جواب خاص معادله $ax''+bx'+cx=e^{-t}$ به صورت
c_0e^{-t} ، c_1te^{-t} یا $c_2t^2e^{-t}$ بر حسب اینکه -1 ریشه
معادله مشخصه نباشد، یا تکرار یک باشد یا تکرار ۲ باشد، می‌باشد.

جواب کلی معادله $ax''+bx'+cx=0$ به صورت
$\alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\mu t}$ اگر معادله مشخصه $ar^2+br+c=0$ جواب حقیقی
متمایز داشته باشد که چون $\lambda+\mu=-\frac{b}{a}<0$ و $\lambda\mu=\frac{c}{a}$
پس λ و μ منفی هستند پس در این حالت

$$\alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\mu t}+c_i t^i e^{-t}$$

$i=0,1,2$ خواهد بود چون e^{-t} ، $e^{\mu t}$ ، $e^{\lambda t}$ به طور نمایی به صفر
میل می‌کنند پس حد عبارت فوق برای هر مقدار α، β و c_i برابر صفر است.

اگر معادله مشخصه جواب مضاعف داشته باشد جواب کلی معادله همگن

$$(\alpha t+\beta)e^{\mu t}$$

است که $\mu=-\frac{b}{2a}<0$ پس حد عبارت

$$(\alpha t+\beta)e^{\mu t}+c_i t^i e^{-t}$$

صفر خواهد بود.

اگر معادله ریشه مختلط $\alpha + i\beta$ داشته باشد آنگاه

جواب کلی بصورت

~~$B e^{\alpha t} \sin \beta t$~~

$$\cancel{A}\, e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

خواهیم داشت که $2\alpha = -\frac{b}{a} < 0$ پس $\alpha < 0$ پس داریم

$$e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) + c_1 t e^{-t}$$

به صفر میل خواهد کرد (توجه کنید که $A \cos \beta t + B \sin \beta t$ کراندار است.

جواب خاص ۲.۵ نمره و هر حالت نیز ۲.۵

$$\frac{1}{9} x(0) - \frac{1}{50} \leq 0$$

۶) ب) فرض کنید $0<c<1$ وجود دارد که برای جواب $x(t)$ این معادله داشته باشیم $x(c)\neq 0$ به چون $-x$ هم جواب است می‌توان فرض کرد $x(c)>0$. $0<\alpha<1$ را نقطه‌ای بگیرید که $x(t)$ ماکزیمم می‌شود.

پس $x'(\alpha)=0$, $x(\alpha)\geq x(c)>0$ بنابراین (۳ نمره)

$$x''(\alpha)+a(\alpha)x'(\alpha)+b(\alpha)x(\alpha)=0$$

(۴ نمره)

$$\Rightarrow x''(\alpha)=-b(\alpha)x(\alpha)>0$$

این با ماکزیمم بودن در تناقض است چون اگر $x'(\alpha)=0$ و $x''(\alpha)>0$ آنگاه α یک min نسبی خواهد بود. پس $x\equiv 0$.

(۳ نمره)