



۱. تابع پیوسته f با دامنه تعریف \mathbb{C} را طوری تعیین کنید که روی هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ مشتق پذیر باشد، اما در سایر نقاط \mathbb{C} مشتق پذیر نباشد. مشتق این تابع را نیز به دست آورید.

۲. فرض کنید $f(0) = 0$ و اگر $z \neq 0$ ، $f(z) = \frac{z^0}{|z|^4}$. ثابت کنید تابع f در مبدأ مختصات مشتق پذیر نیست، اما روابط کوشی-ریمان در مبدأ مختصات برای تابع f برقرارند.

۳. فرض کنید هم تابع f و هم تابع $|f|$ روی صفحه مختلط تحلیلی هستند. ثابت کنید f تابعی ثابت است.

۴. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ و $f = u_1 + iv_1$ تابعی تحلیلی در Ω باشد. همچنین فرض کنید $g = u_2 + iv_2$ تابعی غیرتحلیلی برای هر $z \in \Omega$ باشد به طوری که دارای مشتق های پاره ای پیوسته است. ثابت کنید $h = f(g)$ در Ω تحلیلی است اگر و تنها اگر f تابعی ثابت در Ω باشد.

۵. بزرگترین میدانی را که تابع f با ضابطه $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$ روی آن تحلیلی است، تعیین کنید. همین مسئله را برای $g(z) = z^z$ حل کنید. همچنین مشتق تابع $g(z)$ را به دست آورید.

۶. ثابت کنید توابع $f(z) = \cos \bar{z}$ و $g(z) = \sin \bar{z}$ تحلیلی نیستند.

۷. تحت چه شرایطی تابع $u = \sin x \cosh cy$ همساز است؟ مزدوج همسازهای این تابع را به دست آورید.

۸. آیا تابع $v = -\sin x \sinh y$ می تواند قسمت موهومی یک تابع تحلیلی نظیر f باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، تابع هارمونیک $u = \text{Re}f(z)$ را به دست آورید.

۹. نشان دهید:

$$\sec^{-1} z = -i \log \left(\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1} \right).$$