با یاد او

تمرین‌های فصل ۱۰

مسئله ۱. آیا می‌توان تابع زیر را در نقطه $(0,0)$ به‌قسمی تعریف نمود که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟

$$f(x,y) = \frac{(\sin x)(\sin^3 y)}{1-\cos(x^2+y^2)}.$$

در صورت ممکن بودن این امر مقدار تابع در $(0,0)$ را بیابید.

مسئله ۲. تابع $f(x,y)$ و نقطهٔ (a,b) متعلق به قلمرو آن مفروض هستند. دو تابع یک متغیرهٔ g و h را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = f(x,b), \qquad h(y) = f(a,y).$$

اگر g در $x=a$ و h در $y=b$ پیوسته باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که f در (a,b) پیوسته می‌باشد؟ برعکس آیا پیوستگی f در (a,b) پیوستگی g و h را به‌ترتیب در $x=a$ و $y=b$ نتیجه می‌دهد؟

مسئله ۳. تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y,z) = (x+y+z+xyz, x+y+z+cos(xyz), x+y+z+e^{xyz}).$$

مشتق f را در نقطهٔ $(0,1,2)$ بیابید و یک پایه برای فضای تصویر و هستهٔ مشتق f در نقطهٔ مذکور بیابید.

مسئله ۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\nabla f(x)\cdot x = f(x).$$

نشان دهید رابطهٔ $f(tx)=tf(x)$ برای هر عدد حقیقی t و برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ برقرار است.

مسئله ۵. فرض کنید $n\geq 3$ و $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x)=||x||^2$ در نظر بگیرید.

(الف) عدد حقیقی k را به‌قسمی بیابید که نقطه $a=k(e_1+2e_{n+1})+e_2$ روی نمودار f واقع باشد.

(ب) به‌ازای k بدست آمده در قسمت (الف) معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس بر نمودار f را در نقطه a بدست آورید و یک پایه برای آن صفحه معرفی کنید.

مسئله ۶. (الف) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله $z=x^4-4xy^3+6y^2-2$ را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی می‌باشد.

(ب) همه صفحات افقی مماس بر رویه به معادلهٔ $z=xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$ را بیابید.

مسئله ۷. (الف) فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در مبدأ برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ با ضابطه $f(x,y) = \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲}$ تعریف شده باشد. نشان دهید f در مبدأ پیوسته نمی‌باشد. لیکن مشتق‌های جزئی f در مبدأ وجود دارند.

(ب) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در مبدأ برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ با ضابطهٔ $f(x,y) = \frac{۲x^۲y}{x^۴ + y^۲}$ تعریف شده است. نشان دهید f در مبدأ پیوسته نیست. لیکن برای هر بردار یکهٔ $r = u\vec{i} + v\vec{j}$ مشتق سویی f در راستای r وجود دارد. به‌ازای چنین r بیان شده‌ای یک رابطه برای به‌دست آوردن مشتق سویی f در راستای r ارائه نمایید.

مسئله ۸. با یادآوری مسئلهٔ ۲ نشان دهید اگر مشتقات جزئی مرتبهٔ اول $f(x,y)$ در همسایگی نقطهٔ (a,b) موجود و کراندار باشند آن‌گاه $f(x,y)$ در (a,b) پیوسته است.

مسئله ۹. رویه $x^۲ + y^۲ - ۲z^۲ = ۱$ و نقطهٔ $P = (۱,۱,۱)$ را در نظر بگیرید. نقاط Q از این رویه را به‌قسمی بیابید که پاره‌خط PQ در نقطهٔ Q بر این رویه مماس باشد. در بین چنین پاره‌خط‌هایی کدامیک دارای کمترین طول می‌باشد؟

مسئله ۱۰. (الف) قدر مطلق مشتق جهتی تابع $f(x,y,z) = x^۲ + ۲y^۲ - ۳z^۲$ را در نقطهٔ $(۱,۱,۳)$ در امتداد منحنی C که واقع بر فصل مشترک رویه‌های:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۲ = ۰ \\ x + z - ۴ = ۰ \end{cases}$$

می‌باشد، محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید در فضای سه بعدی دما در نقطهٔ (x,y,z) با رابطهٔ $T(x,y,z) = x^۲ - y^۲ + z^۲ + z^۴ + xz^۲$ توصیف شود. فرض کنید ذره‌ای که در فضای سه بعدی بر خم فصل مشترک رویه‌های:

$$\begin{cases} ۲x^۲ + ۲y^۲ - z^۲ = ۰ \\ z = ۳x^۲ - y^۲ \end{cases}$$

حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t = ۰$ در نقطهٔ $(۱,۱,۲)$ قرار داشته باشد. فرض کنید سرعت ذره در $t = ۰$ برابر با ۷ باشد. قدر مطلق آهنگ تغییر دما را وقتی که ذره در $t = ۰$ قرار دارد، حساب کنید.

مسئله ۱۱. (الف) نشان دهید در نقاط نزدیک به $P=(۱,۱,۱,۱)$ می‌توان u,v را بر حسب x,y توسط دستگاه معادلات روبرو بدست آورد:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+uv+u=۴ \\ xy+u^۳+v=۳. \end{cases}$$

سپس مشتق‌های جزئی u,v را بر حسب x,y در نقطهٔ $(x,y)=(۱,۱)$ بدست آورید. همچنین $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ را نیز در نقطهٔ $(۱,۱)$ بدست آورید.

(ب) فرض کنید F,G,H توابعی حقیقی مقدار از ردهٔ $C^۱$ روی $\mathbb{R}^۴$ تعریف کنند و دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} F(x,y,z,w)=۰ \\ G(x,y,z,w)=۰ \\ H(x,y,z,w)=۰ \end{cases}$$

بطور موضعی x,z,w را بر حسب توابعی از y مشخص کنند. مطلوبست محاسبه $\frac{dx}{dy}$.

مسئله ۱۲. (الف) نقاط بحرانی توابع زیر را روی $\mathbb{R}^۳$ بیابید و آنها را رده‌بندی کنید:

$$f(x,y,z)=xyz-x^۲-y^۲-z^۲,$$

$$f(x,y,z)=xy+x^۲z-x^۲-y-z^۲.$$

(ب) نشان دهید تابع $f(x,y,z)=۴xyz-x^۴-y^۴-z^۴$ در نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ دارای ماگزیمم موضعی می‌باشد. آیا این تابع روی $\mathbb{R}^۳$ دارای ماگزیمم سرتاسری می‌باشد؟

(پ) ماگزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=xyze^{-x^۲-y^۲-z^۲}$ را روی $\mathbb{R}^۳$ بیابید.

مسئله ۱۳. فرض کنید $g(t)$ یک تابع یک متغیره مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید تمام صفحات مماس بر رویهٔ $z=yg(\frac{x}{y})$ از مبدأ عبور می‌کنند.

مسئله ۱۴. با استفاده از سری تیلور مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$\frac{\partial^{۴n}}{\partial x^{۲n}\partial y^{۲n}}\left\{\frac{۱}{۱+x^۲+y^۲}\right\}\Bigg|_{(۰,۰)}.$$

مسئله ۱۵. فرض کنید تابع حقیقی مقدار f روی $\mathbb{R}^3$ بدین‌صورت تعریف شده باشد: f در مبدأ مختصات برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ مختصات با ضابطهٔ $f(x,y,z) = \dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}$ تعریف شده است. پیوستگی f در مبدأ مختصات را بررسی کنید. همچنین مشتقات جزئی f را در مبدأ مختصات محاسبه کنید. آیا توابع $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ در مبدأ مختصات پیوسته می‌باشند؟

مسئله ۱۶. (الف) برای رویه S که توسط معادلهٔ $z = e^{x^2-2x-4y^2+5}$ توصیف می‌گردد معادلهٔ صفحه مماس بر این رویه در نقطه $(1,-1,1)$ را بیابید.

(ب) رویه S که توسط معادلهٔ $x^2+y^2+4z^2 = 16$ توصیف می‌شود را در نظر بگیرید. نقاط (a,b,c) از این رویه را به‌قسمی بیابید که صفحات مماس بر این رویه در این نقاط از نقطهٔ $(0,0,4)$ عبور کنند.

مسئله ۱۷. (الف) فرض کنید $w = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$. نشان دهید w روی $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = -2w.$$

(ب) فرض کنید تابع حقیقی مقدار $u(x,y)$ روی $\mathbb{R}^2$ در رابطه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

صدق کند. با اعمال تعویض متغیر $t = 3x+y$ و $s = x+y$ تعیین کنید u در چه معادله‌ای بر حسب مشتق‌های جزئی بر حسب متغیرهای s,t صدق می‌کند؟

مسئله ۱۸. فرض کنید تابع حقیقی‌مقدار دو متغیره $f(x,y)$ بر روی قرص $0 \leq x^2+y^2 < 1$ تعریف شده باشد. فرض کنید f بر این قرص تابعی مشتق‌پذیر باشد و در رابطه $\nabla f = 0$ روی این قرص صدق کند. نشان دهید f روی این قرص تابعی ثابت است.

مسئله ۱۹. (الف) نشان دهید که می‌توان دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطهٔ $(x,y,z,u,v)=(۱,۱,۱,۱,۱)$ نسبت به مجهولات x,y,z بر حسب توابعی از u,v حل نمود و سپس مشتق‌های جزئی x,y,z را نسبت به u,v در نقطهٔ $(۱,۱)$ بیابید. همچنین در نقطهٔ $(۱,۱)$ مطلوبست یافتن $\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}$.

(ب) فرض کنید روابط

$$\begin{cases} F(x,y,z,w)=\circ \\ G(x,y,z,w)=\circ \end{cases}$$

مجهولات z,w را بر حسب توابعی از x,y تعیین کنند. عبارات $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^۲ w}{\partial x^۲}$ را بر حسب مشتقات جزئی F,G محاسبه کنید.

مسئله ۲۰. فرض کنید f تابعی حقیقی‌مقدار روی $\mathbb{R}^۲$ باشد که در مبدأ مختصات برابر با صفر و در غیر از مبدأ با ضابطه $f(x,y)=xy\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ تعریف شده باشد. مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x}$ در نقطه $(\circ,\circ)$. آیا این دو مقدار برابر هستند؟

مسئله ۲۱. نشان دهید که معادلهٔ $x+۲y+z+e^{۲z}=۱$ در همسایگی $(x,y)=(\circ,\circ)$ دارای جوابی بصورت $z=f(x,y)$ می‌باشد که در رابطهٔ $f(\circ,\circ)=\circ$ صدق می‌کند. چند جمله‌ای تیلور درجهٔ دوم f را حول مبدأ بیابید.

مسئله ۲۲. نشان دهید در نزدیکی نقطهٔ $(x,y)=(۱,۱)$ می‌توان z را بر حسب تابعی از x,y چنان بیان نمود که $z(۱,۱)=\circ$ و رابطهٔ زیر برای هر (x,y) به‌قدر کافی نزدیک به $(۱,۱)$ برقرار باشد:

$$\ln(xy)+۲e^{\frac{z}{x}}-x^۲y+x+z-۲=\circ.$$

نشان دهید نقطهٔ $(۱,۱)$ برای z یک نقطه بحرانی می‌باشد و نوع این نقطهٔ بحرانی را مشخص کنید.

مسئله ۲۳. (الف) ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را روی منحنی فصل مشترک دو رویه $x^۲+z^۲=۱$ و $y^۲+z^۲=۱$ بدست آورید.

(ب) ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y,z)=-x+y+۲z+۴$ را بر ناحیه زیر بدست آورید:

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^۳ : x^۲+۲y^۲+۴z^۲+۲x-۸z\leq ۱۱\right\}.$$

(ج) مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع $f(x_1,\cdots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ و $g(x_1,\cdots,x_n) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$ را بر روی کره $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ بدست آورید.

مسئله ۲۴. در تابع $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ ثابت‌های a,b,c را به‌قسمی تعیین کنید که ماگزیمم مشتق سویی آن در نقطهٔ $(1,2,-1)$ در جهت موازی محور zها باشد و مقدار آن ۶۴ باشد.

مسئله ۲۵. نشان دهید که در همسایگی نقطهٔ $x = 0$ می‌توان y را به‌عنوان تابعی از x چنان در نظر گرفت که $y(0) = 0$ و به‌ازای xهای به‌قدر کافی نزدیک به صفر رابطهٔ $x\sin y(x) = y(x) + \sin x$ برقرار باشد. سه جملهٔ اول مخالف صفر سری تیلور $y(x)$ حول صفر را بیابید.