

با یاد او

سری چهارم تمرین های ریاضی ۲

مسئله ۱. خم $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، را در نظر بگیرید. تصویر خم، یعنی مجموعه

$$\{(t^2, t^3) : t \in [0, 1]\}$$

را در صفحه رسم کنید. نمودار خم، یعنی مجموعه

$$\{(t, \gamma(t)) = (t, t^2, t^3) : t \in [0, 1]\}$$

را در فضا رسم کنید. آیا پرمایش خم هموار است؟ آیا خود خم هموار است؟

مسئله ۲. طول خم هموار $\gamma(t) = (\cos t \sin 3t, \sin t \sin 3t, t)$ ، $0 \leq t \leq 4\pi$ ، را بیابید.

مسئله ۳. فرض کنید r و θ معرف مختصات قطبی در صفحه باشد. طول خم هموار $r = 4 \cos \theta$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، را بیابید.

مسئله ۴. طول خم

$$r(t) = \begin{cases} (0, t^2) & -2 \leq t < 0 \\ (t^2, 0) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

را بیابید.

مسئله ۵. (آ) ذره ای با تندی ثابت روی دایره $x^2 + y^2 = 9$ در جهت مثلثاتی حرکت می کند و در هر ۳

ثانیه یک دور کامل دایره را می زند. شتاب ذره را وقتی در نقطه $(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ قرار دارد بیابید.

(ب) فرض کنید یک ذره در \mathbb{R}^3 به گونه ای حرکت می کند که بردار سرعت آن همواره عمود بر

خط واصل بین ذره و یک نقطه ثابت P است. نشان دهید ذره روی یک کره در \mathbb{R}^3 در حال حرکت است.

مسئله ۶. نشان دهید منحنی $r(t) = (3t^3 - 9t, 3t - 3t^2, 2t^2 - 3t + 5)$ نمی تواند در یک صفحه

قرار داشته باشد.

مسئله ۷. در هر کدام از موارد زیر بردارهای T ، N و B و انحنا و تاب خم مد نظر را در نقطه ذکر شده بیابید و همچنین طول هر کدام از آنها را در بازه تعیین شده بیابید.

(آ) منحنی $\gamma(t) = \left(2t, t^2, \frac{t^3}{3}\right)$ در $t = 0$ و در بازه $0 \leq t \leq 3$.

(ب) منحنی $\gamma(t) = \left(2 + \sqrt{2} \cos t, 1 - \sin t, 3 + \sin t\right)$ در $t = \pi$ و در بازه $0 \leq t \leq \pi$.

در مورد هر یک از خم‌های فوق آیا اعداد p و q می‌توان یافت که در بازه $p \leq t \leq q$ ، خم‌های مذکور در یک صفحه قرار داشته باشند؟

مسئله ۸. اگر مکان و سرعت و شتاب ذره متحرکی در \mathbb{R}^3 که به ترتیب با r و v و a نشان داده می‌شوند در رابطه:

$$a(t) = \lambda(t)r(t) + \mu(t)v(t)$$

صدق کنند که در آن $\lambda(t)$ و $\mu(t)$ دو تابع هموار اسکالر از t هستند که هیچ‌جا برابر با صفر نمی‌باشند و اگر برای هر t داشته باشیم $v \times a \neq 0$ نشان دهید که مسیر این ذره در یک صفحه قرار دارد.

مسئله ۹. سیمی به طول L که دارای مقطع عرضی دایره‌ای به شعاع a است حول قرقه استوانه‌ای به شعاع b طوری می‌پیچانیم که همپوشی روی ندهد ولی هر دو پیچش مجاور به هم چسبیده باشند. چه طولی از قرقه به وسیله این سیم پوشانده می‌شود؟

مسئله ۱۰. (آ) خم $r = r(t)$ در \mathbb{R}^3 که برای آن به‌ازای هر t داریم $\kappa(t) = 1$ ، $\tau(t) = 1$ ، $r(0) = T(0) = \vec{i}$ ، $N(0) = \vec{j}$ و $B(0) = \vec{k}$ را بیابید.

(ب) کره S^2 را در نظر بگیرید. فرض کنید خم $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ بر حسب طول قوس پرمایش شده باشد و اندازه بردار $\gamma''(t)$ برای هر مقدار t برابر با مقدار ثابت ناصفر k باشد. اگر $\gamma(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$ و $\gamma'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ موازی با بردار $(1, 2, 1)$ باشد، معادله خم γ که بر حسب طول پرمایش شده است را بیابید.