به نام خدا

سری دوم تمرین‌های ریاضی ۲

مسئله ۱. همه ماتریس‌های ۲×۲ حقیقی M را پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

مسئله ۲. همهٔ ماتریس‌های ۲×۲ حقیقی M را پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} M = M.$$

مسئله ۳. برای هر یک از ماتریس‌های داده شدهٔ A در زیر، همهٔ ماتریس‌های Mای را پیدا کنید که جذر A باشند، یعنی $MM = A$:

آ) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$ ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$ ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$

مسئله ۴. ماتریس $M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) نشان دهید اگر برای ماتریس ۲×۲، A، $AM = ۰$، آن‌گاه $A = ۰$.

ب) ماتریس ۳×۳ ناصفر Bای پیدا کنید که $MB = ۰$.

مسئله ۵. نشان دهید تحت اثر هر تابع مستوی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تصویر هر خط راست یا خطی راست است یا فقط یک نقطه. اگر l و l' دو خط موازی در $\mathbb{R}^n$ باشند، نشان دهید $f(l)$ و $f(l')$ یا هر دو نقطه‌اند، یا یک زوج خط موازی، یا یک خط راست.

مسئله ۶. نگاشت مستوی $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ را به‌صورت $f(x) = L(x) + B$ تعریف می‌کنیم که در آن L نگاشت خطی با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است و $B = (-۱, -۱)$. تصویر مربع $S = \{(x,y) : |x| \leq ۱, |y| \leq ۱\}$ را تحت اثر f توصیف کنید.

مسئله ۷. در هر مورد، برای تابع خطی مربوط به ماتریس داده شده هسته و تصویر تابع را توصیف کنید و مشخص کنید که تابع خطی یک‌به‌یک است یا نیست. و اگر تابع خطی وارون‌پذیر است، ماتریس وارون تابع را محاسبه کنید.

آ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$
ج) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$
ه) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$
ز) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$
د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$
و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$
ح) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

مسئله ۸. نگاشت خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(x,y,z,t) = (x-y+5t, z+4y, x+t, -z)$$

فضای پوچ و فضای تصویر این نگاشت را به‌همراه بعد آن‌ها به‌دست آورید.

مسئله ۹. نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

تصویر خط راست $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ و صفحهٔ $x+2y-2z-4=0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

مسئله ۱۰. تابع خطی $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

بعد هسته و بعد تصویر تابع را تعیین کنید. تصویر ابرصفحه $x_۱ - x_۲ + x_۳ + x_۴ - ۱ = ۰$ را تحت اثر f پیدا کنید.

مسئله ۱۱. نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^۴ \to \mathbb{R}^۵$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۷ & -۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

آ) صفحه‌ای را در $\mathbb{R}^۴$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f خطی راست باشد و صفحه‌ای در $\mathbb{R}^۴$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک صفحه باشد.

ب) ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^۴$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f یک صفحه باشد و ابرصفحه‌ای در $\mathbb{R}^۴$ مثال بزنید که تصویر آن تحت اثر f سه‌بعدی باشد.

مسئله ۱۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ خطی است و $E_۱$ و $E_۲$ دو زیرفضای مستوی موازی (نه لزوماً هم‌بعد) در $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید $f(E_۱)$ و $f(E_۲)$ یا موازی‌اند یا یکی زیر مجموعه‌ای از دیگری است.

مسئله ۱۳. فرض کنید تابع خطی $f : \mathbb{R}^{۲n} \to \mathbb{R}^{۲n}$ چنان باشد که $f \circ f$ تابع ثابت صفر باشد. نشان دهید بعد هستهٔ f بزرگ‌تر از یا مساوی با n است. به‌ازای $n = ۲$، مثال‌هایی از این تابع بیاورید که بعد هسته ۲ و ۳ باشد.

مسئله ۱۴. فرض کنید هستهٔ تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، $(n-۱)$بعدی باشد. اگر $f \circ f$ تابع ثابت صفر نباشد، نشان دهید ترکیب k بارهٔ f با خود آن، $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ بار}}$، $k > ۲$، نیز تابع ثابت صفر نیست.

مسئله ۱۵. فرض کنید برای ماتریس $n \times n$، $A \neq ۰$، ماتریسی $n \times n$، $B \neq ۰$، موجود باشد که $AB = ۰$. نشان دهید ماتریسی $n \times n$، مانند $C \neq ۰$، وجود دارد که $CA = ۰$. (راهنمایی: توابع خطی متناظر با ماتریس‌ها را در نظر بگیرید.)