به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ — تعداد سوال‌ها: ۷

تمرین‌های سری هشتم — پاییز ۱۳۹۸

---

۱) (سوال ۶ صفحه ۱۹۸ کتاب دکتر شهشهانی)

(الف) فرض کنید c_1، ...، c_k نقاطی متمایز در بازه $[a, b]$ باشند و C_1، ...، C_k اعداد حقیقی و دلخواه. تابع $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ را به صورت

$$g(x) = \begin{cases} C_i & x = c_i, \quad i = 1, \dots, k \\ 0 & x \notin \{c_1, \dots, c_k\} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید g انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b g = 0$.

(ب) فرض کنید $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته، c_1 تا c_k نقاطی متمایز در بازه $[a, b]$ و C_1 تا C_k اعداد حقیقی دلخواه باشند. ثابت کنید تابع

$$g(x) = \begin{cases} C_i & x = c_i, \quad i = 1, \dots, k \\ f(x) & x \notin \{c_1, \dots, c_k\} \end{cases}$$

انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b f = \int_a^b g$.

۲) (سوال ۱۲ صفحه ۱۹۹ کتاب دکتر شهشهانی)

(الف) فرض کنید $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر با مقادیر نامنفی باشد. ثابت کنید اگر f در نقطه‌ای از $[a, b]$ مانند x_0 پیوسته باشد و $f(x_0) > 0$، آن‌گاه $\int_a^b f > 0$.

(ب) فرض کنید $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر باشند که

$$f(x) \geq g(x), \quad x \in [a, b]$$

و نقطه‌ای از $[a, b]$ مانند x_0 وجود داشته باشد که f و g در آن پیوسته باشند و $f(x_0) > g(x_0)$. ثابت کنید $\int_a^b f > \int_a^b g$.

(پ) با مثالی نشان دهید اگر شرط پیوستگی در قسمت‌های (الف) و (ب) حذف شود، نمی‌توان نابرابری اکید را نتیجه گرفت.

۳) (سوال ۲ صفحه ۲۱۱ کتاب دکتر شهشهانی) تابع چندجمله‌ای

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

را در نظر بگیرید، که در آن $n \geq 1$. ثابت کنید اگر K به اندازه کافی بزرگ باشد، میانگین $p(x)$ روی $[0, K]$ مثبت است.

٤) **(سوال ۳ صفحه ۲۱۱ از کتاب دکتر شهشهانی)** برای هر یک از توابع زیر کلی‌ترین تابع اولیه را توصیف کنید.

(ج) $f(x) = \sin^n x \cos^{2m+1} x$، روی $\mathbb{R}$، که در آن m و n اعداد طبیعی‌اند.

٥) **(سوال ۴ صفحه ۲۱۱ کتاب دکتر شهشهانی)** در هر مورد تابع اولیه‌ای برای تابع داده شده حدس بزنید و تحقیق کنید که حدستان درست است. از اتحادهای مثلثاتی برای تبدیل حاصل‌ضرب به مجموع یا تفاضل استفاده کنید.

(ج) $(\cos mx)(\cos nx)$ که در آن m و n اعدادی صحیح‌اند.

٦) **(سوال ۵ صفحه ۲۱۱ کتاب دکتر شهشهانی)**

(الف) تابع اولیه‌ای برای $\frac{1}{\sin x \cos x}$ روی $]0, \frac{\pi}{2}[$ پیدا کنید (توجه کنید که $\frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$).

(ب) تابع اولیه‌ای برای $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ روی $]0, \pi[$ پیدا کنید (توجه کنید که $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$)

(ت) با استفاده از قسمت (ب) ثابت کنید که تابع اولیه‌ای برای $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ روی $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$، تابع $\ln \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$ است.

(ث) تحقیق کنید که $\ln(\sec x + \tan x)$ تابع اولیه‌ای برای $\sec x$ روی $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ است. ارتباط دقیق این عبارت با نتیجه (ت) چیست.

۷) **(سوال ۷ صفحه ۲۱۱ کتاب دکتر شهشهانی)** برای تابع $f: [1, \infty[\to \mathbb{R}$، $f(x) = \frac{1}{x^p}$، که در آن p عددی گویا و مثبت است، $\int_1^A f$ را حساب کنید، که در اینجا A عددی داده شده و بزرگتر از ۱ است. ثابت کنید $\lim\limits_{A\to\infty} \int_1^A f$ متناهی است، اگر و فقط اگر $p > 1$.

۸) **(سوال ۱۰ صفحه ۲۱۱ کتاب دکتر شهشهانی)** ثابت کنید **که اگر** $x \neq 1$، $\ln x < x - 1$. (مماس بر نمودار $\ln$ را در نقطه $(1,0)$ در نظر بگیرید.)