

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوالها: ۹

ریاضی عمومی ۱

پاییز ۱۳۹۸

تمرین‌های سری پنجم

(۱) سوال ۵ صفحه ۶۶ از کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید عدد حقیقی مثبت $A = a_0.a_1a_2a_3 \dots$ داده شده است. مقصود از رند کردن A به n رقم پس از اعشار، جایگزین کردن عدد $B_n = b_0.b_1 \dots b_n$ به جای A است که B_n به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر عدد $0.a_{n+1}a_{n+2} \dots$ کوچکتر از $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$ باشد،

$$B_n = a_0.a_1 \dots a_n$$

در غیر این صورت قرار می‌دهیم

$$B_n = a_0.a_1 \dots a_n + 10^{-n}.$$

نمایش اعشاری اعداد حقیقی نامنفی را در نظر می‌گیریم و برای اجتناب از ابهام، رشته‌های $999 \dots$ پس از ممیز را با افزایش رقم قبلی به صفر تبدیل می‌کنیم. تابع $r_n: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$r_n(x) = x_n$$

(که x_n رند شده x به n رقم پس از ممیز است.)

(الف) تابع r_n در کدام نقاط پیوسته و در کدام نقاط ناپیوسته است؟ نمودار r_1 و r_2 را رسم کنید.

(ب) چه رابطه‌ای میان $[x]$ (جزء صحیح x) و $r_0(x)$ وجود دارد؟

(۲) سوال ۶ صفحه ۷۳ کتاب دکتر شهشهانی) تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

(الف) نمودار f را رسم کنید.

(ب) نقاط پیوستگی و ناپیوستگی f را پیدا کنید.

(پ) ثابت کنید عدد $x \in [0, 1]$ گویاست، اگر و فقط اگر عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد که

$$f^n(x) = 0 \quad (\text{در اینجا مقصود از } f^n, n \text{ بار ترکیب } f \text{ با خودش است، یعنی } f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n)$$

(۳) سوال ۸ صفحه ۷۴ کتاب دکتر شهشهانی) تابع $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = 10x - [10x]$$

در نظر بگیرید.

(الف) نمودار f را رسم کنید.

(ب) نقاط پیوستگی و ناپیوستگی f را پیدا کنید.

(پ) ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند n ,

$$f^n(x) = 10^n x - [10^n x]$$

(در اینجا مقصود از f^n ، n بار ترکیب f با خودش است).

(ت) نقاط ناپیوستگی f^n را پیدا کنید.

(ث) تابع f^n با تابع x_n ، که در تمرین ۵ صفحه ۶۶ تعریف شد، چه ارتباطی دارد؟

(۴) (سوال ۲ صفحه ۹۰ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید A, B اعداد حقیقی اند و تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(t) = At + B$ در نظر بگیرید. ثابت کنید هر یک از نقاط a و b نقطه ماکسیمم یا نقطه مینیمم تابع f است.

(۵) (سوال ۳ صفحه ۹۰ کتاب دکتر شهشهانی) تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = x^2 + Ax + B$ در نظر بگیرید. تحقیق کنید که نمودار g نسبت به خط راست $x = -\frac{A}{2}$ تقارن دارد. نتیجه بگیرید که روی هر بازه $[a, b]$ دست کم یکی از مقادیر ماکسیمم یا مینیمم g در یکی از نقاط انتهایی بازه ظاهر می شود.

(۶) (سوال ۱ صفحه ۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) مجموعه نقاط حدی هر یک از مجموعه های زیر را در \mathbb{R} مشخص کنید.

(پ) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(ت) \mathbb{Q}

(ث) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(۷) (سوال ۲ صفحه ۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) در مورد بزرگترین دامنه تعریف برای تابعی که ضابطه آن داده شده است در نظر بگیرید و تحقیق کنید که حد مورد نظر قابل مطرح کردن است یا نیست. سپس حد را در صورت وجود پیدا کنید.

(ث) $n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{x-1}$

(ح) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{x-1}$

(۸) (سوال ۳ صفحه ۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) در مورد وجود حد داده شده تحقیق کنید.

(ت) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - x \left[\frac{1}{x} \right] \right)$

(۹) (سوال ۴ صفحه ۹۸ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید a نقطه حدی مجموعه S است و تابع های $f, g, h: S \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده اند، به طوری که به ازای هر x در S

$$f(x) < g(x) < h(x).$$

ثابت کنید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ نیز وجود دارد و برابر با L است.