

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوالها: ۱۱

پاییز ۱۳۹۸

ریاضی عمومی ۱

تمرین‌های سری سوم

(۱) سوال ۴ صفحه ۲۹ از کتاب دکتر شهشهانی) در هر مورد مجموعه نقاطی از صفحه را مشخص کنید که در رابطه داده شده صدق می‌کنند.

ب) $\arg z = \frac{15}{6}\pi$

ت) $|z|^2 - 3|z| + 2 < 0$

چ) $|z - i| + |z + i| < 4$

(۲) سوال ۴ صفحه ۳۷ کتاب دکتر شهشهانی) ثابت کنید

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

و نتیجه بگیرید که اگر $z_1, z_2 \neq 0$ و θ زاویه میان نیم‌خط‌های واصل از 0 به z_1 و z_2 باشد

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)}{|z_1||z_2|}$$

(۳) سوال ۵ صفحه ۳۷ کتاب دکتر شهشهانی) در هر مورد مجموعه نقاطی را که در رابطه داده شده صدق می‌کنند توصیف کنید.

الف) $|z - i| > 2|z + i|$

ب) $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Im}(z^2)$

پ) $\operatorname{Re}(z + 1) = |z|$

(۴) سوال ۷ صفحه ۳۷ کتاب دکتر شهشهانی) برای $n \geq 2$ و عدد مختلط دلخواه c ، نشان دهید مجموع ریشه‌های $az^n + c = 0$ برابر صفر است.

(۵) سوال ۹ صفحه ۳۷ کتاب دکتر شهشهانی) معادله‌های زیر را حل کنید.

پ) $z^2 = \frac{1-i}{1+i}$

ت) $z^n = nz$

(۶) سوال ۲ صفحه ۴۱ کتاب دکتر شهشهانی) منحنی $|z - A| + |z - B| = 1$ را حول نقطه $(5, 3)$ به اندازه $\frac{\pi}{6}$ دوران می‌دهیم. معادله شکل حاصل را به دست آورید.

(۷) سوال ۶ صفحه ۴۱ کتاب دکتر شهشهانی) تبدیل $T(z) = (2\sqrt{3} + 2i)z + i$ را به صورت ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز مشترک بنویسید.

(۸) سوال ۹ صفحه ۴۱ کتاب دکتر شهشهانی) مثلثی در نظر بگیرید که سه رأس آن در نقاط Z_1, Z_2 و Z_3 هستند. روی هر ضلع آن مثلثی متساوی‌الاضلاع بیرون مثلث $Z_1Z_2Z_3$ رسم می‌کنیم. به این ترتیب، سه مثلث با رئوسهای (Z_1, Z_2, W_3) ، (Z_2, Z_3, W_1) و (Z_3, Z_1, W_2) پدید می‌آید. ثابت کنید مرکزوار (محل برخورد میانه‌های) مثلث‌های $W_1W_2W_3$ و $Z_1Z_2Z_3$ بر هم منطبق‌اند.

(۹) سوال ۱ صفحه ۵۵ کتاب دکتر شهشهانی) در هر مورد ثابت کنید که دنباله a_n به صفر همگراست.

پ) $(|z| > 1, z \in \mathbb{C}) a_n = \frac{n}{z^n}$

ت) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

ث) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(۱۰) سوال ۴ صفحه ۵۵ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید (c_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد و $c_n =$

$a_n + ib_n$ ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c^*$ ، اگر و فقط اگر

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \operatorname{Re}(c^*)$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \operatorname{Im}(c^*)$.

(۱۱) سوال ۱۳ صفحه ۵۶ کتاب دکتر شهشهانی) دنباله (a_n) را به صورت

$$a_n = \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}_n}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید (a_n) همگراست و حد آن را حساب کنید.