

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوالها: ۹

پاییز ۱۳۹۸

ریاضی عمومی ۱

تمرین‌های سری دوم

(۱) اگر $z = x + iy$ ، آن‌گاه نشان دهید $|x| + |y| \geq |z| \geq \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}}$. تساوی چه زمانی برقرار می‌شود.

(۲) ثابت کنید $(1 - i\sqrt{3})^{-10} = -2^{11}(1 + i\sqrt{3})$.

(۳) ثابت کنید در صفحه مختلط، z_1, z_2, z_3 راس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع اند اگر و تنها اگر

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3.$$

(۴) عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\sqrt{1+i}$

ب) $\sqrt{1+\sqrt{i}}$

(۵) فرض کنید z_1, z_2, \dots, z_n اعداد مختلطی باشند با این ویژگی که همه روی دایره‌ای به شعاع r قرار دارند. نشان دهید

$$z = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \dots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \dots z_n}$$

عددی حقیقی است.

(۶) نشان دهید

$$\sin 5t = 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t.$$

(۷) فرض کنید z_1, z_2, \dots, z_n ریشه‌های m واحد باشند. نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^n z_i^k = \begin{cases} n, & n|k \\ 0, & n \nmid k \end{cases}$$

(۸) یک m ضلعی و یک n ضلعی منتظم در یک دایره محاط شده‌اند. اگر این دو دارای یک راس مشترک باشند، دقیقاً چند راس مشترک دارند؟

(۹) ثابت کنید ریشه‌های معادله $(z+1)(z+2) \dots (z+n) = n!$ ، $n \in \mathbb{N}$ ، روی محیط یا درون دایره به مرکز $(-n, 0)$ و شعاع n قرار دارند.