به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ | تعداد سوال‌ها: ۸

تمرین‌های سری اول | پاییز ۱۳۹۸

---

۱) با استفاده از خاصیت تمامیت مجموعه اعداد حقیقی، ثابت کنید که $\sqrt{2}$ به عنوان یک عدد حقیقی وجود دارد.

۲) فرض کنید که دو عدد حقیقی a و b در این خاصیت صدق می‌کنند که برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$a \leq b + \varepsilon.$$

ثابت کنید که $a \leq b$.

۳) سوپریمم و اینفیمم مجموعه‌های زیر را بیابید:

الف) $\mathbb{Q} \cap \left[\sqrt{2}, 7\right)$

ب) $\mathbb{Q}' \cap \left[-\frac{5}{3}, \sqrt{3}\right)$

ج) $\emptyset$

د) $(\mathbb{Q} \cup [-1,1]) \cap (\sqrt{5}, \infty)$

٤) فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ باشد. اگر مجموعه $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ از بالا کراندار باشد. ثابت کنید که

$$\sup A = \sup_{i \in I} (\sup A_i).$$

۵) برای اعداد حقیقی $x, y \in \mathbb{R}$ که $x > 0$، ثابت کنید که عدد طبیعی n چنان یافت می‌شود که

$$nx > y.$$

٦) برای هر دو عدد حقیقی $x, y \in \mathbb{R}$ که $x < y$، ثابت کنید که عدد گویای p چنان یافت می‌شود که

$$x < p < y.$$

۷) فرض کنید مجموعه S از بالا کراندار باشد و مجموعه کران‌های بالای S را با T نمایش دهید. ثابت کنید T از پایین کراندار است و بزرگترین کران پایین آن برابر با کوچکترین کران بالای S است.

۸) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{R}$ باشند. مجموعه $A + B$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

ثابت کنید اگر A و B از بالا کراندار باشند، $A + B$ نیز از بالا کران‌دار است. همچنین ثابت کنید کوچکترین کران بالای $A + B$ برابر با مجموع کوچکترین کران‌های بالای A و B است.