دانشکده علوم ریاضی

معادلات مرتبه دوم	آبان ۹۸

معادلات دیفرانسیل عادی

۱. فرض کنید تابع $r(t)$ بر بازه $(0, +\infty)$ مشتق پیوسته دارد و تابع $y_1(t) = t$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''(t) + \frac{1}{t^2}y'(t) + r(t)y(t) = 0$ بر این بازه است.(میانترم ۹۵)

الف) یک جواب دیگر $y_2(t)$ برای معادله $y''(t) + t^{-2}y'(t) + r(t)y(t) = 0$ بدست آورید که $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مستقل خطی باشند. می‌توانید از روش کاهش مرتبه استفاده کنید.

ب) دلیلی برای مستقل بودن $y_1(t)$ و $y_2(t)$ پیشنهادی خود در قسمت قبل بیاورید.

۲. به‌کمک روش کاهش مرتبه و این که $y_1(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ یک جواب مسئله زیر است، جواب عمومی آن را بیابید.

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - \frac{1}{4})y = 0.$$

۳. جواب عمومی مسئله زیر را بیابید.

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

۴. سه جواب معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم $L[y] = g(t)$ به‌صورت زیر باشند.

$$\Psi_1(t) = 3e^t + e^{t^2}, \quad \Psi_2(t) = 7e^t + e^{t^2}, \quad \Psi_3(t) = 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}.$$

جواب مسئله مقدار اولیهٔ زیر را بیابید:

$$L[y] = g, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

۵. جواب مسئله مقدار اولیهٔ زیر را بیابید.

$$3y'' + 4y' + y = (\sin t)e^{-t}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

۶. فرض کنید یکی از جواب‌های معادلهٔ $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ تابع $(1 + t^2)$ باشد و رونسکین هر دو جواب معادله ثابت باشد. جواب عمومی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t.$$