



معادلات دیفرانسیل عادی

۱. فرض کنید p و q توابعی پیوسته روی بازه $I = (\alpha, \beta)$ باشند و y_1 و y_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند. ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم مشترکی در $x_0 \in I$ داشته باشند آن‌گاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها در آن بازه باشند.

۲. فرض کنید p و q توابعی پیوسته روی بازه $I = (\alpha, \beta)$ باشند و y_1 و y_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند. ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه‌ی عطف مشترکی در $x_0 \in I$ داشته باشند آن‌گاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها در آن بازه باشند مگر این‌که p و q هر دو در x_0 صفر باشند.

۳. اگر تابع‌های y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ تشکیل بدهند، ثابت کنید بین هر دو ریشه‌ی متوالی y_1 ، یک و تنها یک ریشه از y_2 موجود است.

۴. فرض کنید p و q توابعی پیوسته روی بازه $(-\infty, +\infty)$ باشند و y_1 و y_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند. ثابت کنید اگر

$$W[y_1, y_2](x_0) = 0, \quad y_1(x_0) = 0$$

آن‌گاه یا y_1 متحد صفر است یا y_1 ضریب ثابتی از y_2 است.

۵. یک معادله خطی مرتبه دوم همگن بسازید که برای $t > 0$ ، توابع $t \sin t$ و $t \cos t$ جواب‌های آن باشند. آیا چنین معادله‌ای یکتا است؟ (میانترم ۸۹)

۶. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید. نمودار جواب را رسم کنید و رفتار آن را با افزایش t تشریح کنید.

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

۷. مسئله مقدار اولیه زیر را روی بازه $(0, \infty)$ حل کنید.

$$t^2 y'' - ty' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

۸. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad t > 0.$$