



معادلات دیفرانسیل عادی

۱. در مسئله‌ی زیر یک عامل انتگرال‌ساز بیابید و معادله‌ی دیفرانسیل داده شده را حل کنید. (میانترم ۹۰)

$$dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right) dy = 0.$$

۲. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. (میانترم ۹۵)

$$y dx + x(1 - 3x^2y^2) dy = 0. \quad (1)$$

الف) نشان دهید این معادله کامل نیست.

ب) فرض کنید $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل (۱) باشد. با جایگذاری در معادله (۱)، α و β مناسب را پیدا کنید.

ج) با استفاده از عامل انتگرال‌ساز بدست آمده در قسمت قبل، جواب عمومی معادله (۱) را در نواحی که $x, y \neq 0$ بدست آورید.

۳. الف) معادله زیر را در نظر بگیرید. (میانترم ۹۵)

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)dx + (Dx^2 + Exy + Fy^2)dy = 0.$$

شرط لازم و کافی برای ضرایب بیابید که معادله کامل باشد.

ب) در ناحیه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, x \neq y, x \neq -y, y \neq -2x\}$ معادله

$$(-2x^2 - 2xy + y^2)dx + (x^2 + xy + y^2)dy = 0$$

را به طور کامل حل کنید. در انتخاب روش حل آزاد هستید.

۴. معادلات زیر را به طور کامل حل کنید. (میانترم ۹۴)

$$y' \tan x + y = \frac{2x}{\cos x} \quad \text{الف)}$$

$$\left(3x^2 \tan y - \frac{2y^2}{x^3}\right)dx + \left(4y^3 + \frac{x^3}{\cos^2 y} + \frac{2y^2}{x^2}\right)dy = 0 \quad \text{ب)}$$

$$e^x dx + \left(e^x \cot y + \frac{2y}{\sin y}\right)dy = 0 \quad \text{ج)}$$

$$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2 \quad \text{د)}$$

$$y' = \frac{y}{4} \cos x + \frac{\sin 2x}{y} \quad \text{ه)}$$

۵. معادله مرتبه اول زیر را با استفاده از ضرب در عامل انتگرال ساز حل کنید. جواب ضمنی کافی است.

(میانترم ۸۹)

$$\left(\frac{t^2}{y} + \frac{3y}{t}\right)y' + \left(3t + \frac{6}{y}\right) = 0, \quad y(1) = 1.$$

۶. یک جواب پیوسته برای مسئله مقدار-اولیه زیر بیابید. (بخش ۲.۱، تمرین ۱۷ ویرایش ۴ کتاب براون)

$$y' + y = g(t), \quad y(0) = 0$$

که در آن

$$g(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

۷. با تغییر متغیر مناسب جواب عمومی معادله زیر را بیابید. (بخش ۴.۱، تمرین ۲۲ ویرایش ۴ کتاب

براون)

$$(1 + t - 2y) + (4t - 3y - 4)\frac{dy}{dt} = 1.$$