



تاریخ: ۹۸/۹/۱۴  
شماره: .....  
پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۲ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی مهندسی (گروه‌های ۱ و ۲)

۲۲-۰۳۵

نیمسال اول ۹۹-۹۸

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است»، یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. (الف) تمام اعداد مختلطی مثل  $z$  را بیابید که در معادله  $z^2 - \bar{z} = 0$  صدق می‌کنند.  
(ب) فرض کنید  $z$  عدد مختلطی باشد که  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . نشان دهید

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right| < \frac{1}{\bar{z}}$$

سؤال ۲. تابع  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه  $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x$  در نظر بگیرید.  
(الف) نشان دهید  $u$  تابعی همساز روی  $\mathbb{R}^2$  است.

(ب) اگر  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  مزدوج همساز  $u$  روی  $\mathbb{R}^2$  باشد طوری که  $v(0, 0) = 1$  ضابطه  $v$  را به دست آورید.

سؤال ۳. فرض کنید  $D_1$  میدان متشکل از تمام نقاط بالای خطی باشد که از دو نقطه  $-1$  و  $i$  می‌گذرد و  $D_2$  میدان داخل دایره‌ای که از سه نقطه  $i+1$ ،  $0$  و  $1$  عبور می‌کند. نگاشتی موبیوسی را بیابید که میدان  $D_1$  را به طور یک‌به‌یک، پوشا و هم‌مدیس به روی میدان  $D_2$  بنگارد و  $-1$  و  $i$  را به ترتیب به  $1+i$  و  $0$  تصویر کند.

سؤال ۴. فرض کنید  $C$  یک خم ژردان و قطعه به قطعه هموار باشد که نقاط  $0$  و  $1$  در درون آن هستند. با استفاده از فرمول انتگرال کشی و قضیه مشتق، حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$$

سؤال ۵. فرض کنید تابع  $f$  با ضابطه  $f(z) = \frac{1}{z^2 - z^4}$  داده شده است.

(الف) تابع  $f$  را حول صفر روی میدان  $|z| > 1$  به سری لوران بسط دهید.

(ب) اگر  $C$  یک خم ژردان و قطعه به قطعه هموار در میدان  $|z| > 1$  باشد که در درون آن است، به

- کمک قسمت (الف)، حاصل انتگرال  $I = \int_C f(z) dz$  را محاسبه کنید.

(ج) اگر  $C$  همان خم قسمت (ب) باشد، با استفاده از قضیه مانده، حاصل انتگرال بالا را محاسبه کنید.

سؤال ۶. فرض کنید  $a > 0$  و  $\lambda > 0$  دو عدد حقیقی باشند. با استفاده از ابزارهای نظریه توابع مختلط، حاصل انتگرال حقیقی ناسره زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

توزیع نمره. سؤال ۱:  $10+10$  نمره،

سؤال ۳:  $10$  نمره،

سؤال ۵:  $10+10+10$  نمره،

سؤال ۲:  $10+10$  نمره،

سؤال ۴:  $10$  نمره،

سؤال ۶:  $10$  نمره.

مجموع:  $100$  نمره