ج ۱۰)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow l = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cancel{(0)\cos nx \, dx}^{\,0} + \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right) dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi} & n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi} & \text{سایر } n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(-\cos(n+1)\pi + \cos(n-1)\pi + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) & \text{سایر } n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n+1}{n+1} - \frac{(-1)^n+1}{n-1}\right) & \text{سایر } n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) & \text{زوج } n \end{cases}$$

محاسبه a_0:

1 $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)x - \cos(n+1)x}{2}\,dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} & n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right)\Big|_0^{\pi} & \text{سایر } n\text{ ها} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & \text{سایر } n\text{ ها} \end{cases}$$

پس سری فوریه تابع بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)} + \frac{1}{2}\sin x$$

f در سراسر $\mathbb{R}$ پیوسته است. پس

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)} + \frac{\sin x}{2}$$

حال قرار دهید $x = \frac{\pi}{2}$. درنتیجه خواهیم داشت:

$$1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

۲C) فرض کنید $\lambda<0$. قرار دهید $\lambda=-\alpha^2$. پس چند جمله ای مشخصه بصورت زیر می باشد:

$$r^2-\alpha^2=0 \Rightarrow r=\pm\alpha$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}$$

$$y'(x)=c_1\alpha e^{\alpha x}-c_2\alpha e^{-\alpha x}$$

اعمال شرایط مرزی

$$y'(0)=c_1\alpha-c_2\alpha=0 \xRightarrow{\alpha\neq 0} c_1=c_2$$

اگر $c_1=c_2$، آنگاه

$$y(1)+y'(1)=0 \Rightarrow c_1e^{\alpha}+c_1e^{-\alpha}+c_1\alpha e^{\alpha}-c_1\alpha e^{-\alpha}=0$$

$$\Rightarrow c_1(1+\alpha)e^{\alpha}+c_1(1-\alpha)e^{-\alpha}=0$$

$$\Rightarrow c_1=0$$

پس $c_1=c_2=0$.

اگر $\lambda=0 \Leftarrow y''=0 \Leftarrow y(x)=c_1x+c_2$.

$$y'(0)=c_1=0$$

$$y(1)+y'(1)=\cancel{c_1}^{0}+c_2+\cancel{c_1}^{0}=0 \Rightarrow c_2=0$$

اگر $\lambda=\alpha^2$، پس چند جمله ای مشخصه بصورت $r^2+\alpha^2=0$ خواهد بود.

$$\Rightarrow y(x)=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x$$

$$y'(x)=-c_1\alpha\sin\alpha x+c_2\alpha\cos\alpha x$$

$$y'(0)=c_2\alpha=0 \xRightarrow{\alpha\neq 0} c_2=0$$

بگیرید $c_1=$

$$y(1)+y'(1)=c_1\cos\alpha-c_1\alpha\sin\alpha=0 \Rightarrow \cot\alpha=\alpha$$

این معادله به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، جواب منحصر بفردی مانند α_n دارد. پس $\lambda_n=\alpha_n^2$ یک مقدار ویژه است و $y_n=\cos\alpha_n x$ یک تابع ویژه متناظر با آن می باشد.

$$\|y_n\| = \sqrt{\langle y_n | y_n \rangle} = \sqrt{\int_0^1 \cos^2\alpha_n x \, dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin^2\alpha_n}$$

در نتیجه پایه متعامد یکه بصورت

$$O = \left\{ \frac{\sqrt{2}\cos\alpha_1 x}{\sqrt{1+\sin^2\alpha_1}}, \frac{\sqrt{2}\cos\alpha_2 x}{\sqrt{1+\sin^2\alpha_2}}, \dots \right\}$$

حال برای بدست آوردن سری فوریه تعمیم یافته تابع $f(x)=x$ به طریق زیر عمل می کنیم:

$$c_n = \left\langle x, \frac{\sqrt{2}\cos\alpha_n x}{\sqrt{1+\sin^2\alpha_n}} \right\rangle = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\, x\cos\alpha_n x}{\sqrt{1+\sin^2\alpha_n}}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin^2\alpha_n}}\left(\frac{2\cos\alpha_n - 1}{\alpha_n^2}\right)$$

پس سری فوریه تعمیم یافته $f(x)=x$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+\sin^2\alpha_n}\left(\frac{2\cos\alpha_n - 1}{\alpha_n^2}\right)\cos\alpha_n x$$

۳ ج) f تابعی زوج است، پس $B(\omega)=0$.

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

در نتیجه انتگرال فوریه f بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega$$

از طرفی بنابر قضیه انتگرال فوریه، به ازای هر x که $x\neq\pm1$، انتگرال فوریه f به $f(x)$ همگراست. همچنین این انتگرال به ازای $x=\pm1$ به $\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$ همگراست. در نتیجه

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & x=\pm1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

حال بنابر حکم خواسته شده برای $a\in\mathbb{R}$،

$$\int_0^\infty\frac{\sin x\cos ax}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |a|<1\\ \frac{\pi}{4} & a=\pm1\\ 0 & |a|>1\end{cases}$$

ج ۳) قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin n\pi x$$

حال این سری را در مسئله قرار می‌دهیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n'(t) \sin n\pi x = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)(n\pi)^2 \sin n\pi x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n'(t) + (n\pi)^2 A_n(t) \right) \sin n\pi x = 0$$

تساوی فوق سری فوریه سینوسی تابع ثابت صفر است، پس باید

$$A_n'(t) + (n\pi)^2 A_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow A_n(t) = a_n e^{-(n\pi)^2 t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x \Leftarrow$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x$$

$$\Rightarrow x - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\sin n\pi x\| \frac{\sin n\pi x}{\|\sin n\pi x\|}$$

$$\Rightarrow a_n = \left\langle x - x^2, \frac{\sin n\pi x}{\|\sin n\pi x\|^2} \right\rangle \overset{\|\sin n\pi x\|^2 = \frac{1}{2}}{=\!=} 2\int_0^1 (x - x^2) \sin n\pi x \, dx$$

$$= 4 \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{(n\pi)^3} \right]$$

در نتیجه

$$u(x,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{(n\pi)^3} e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

بارم بندی سؤالات

سؤال ۱

الف)
- محاسبه a_n — ۸ نمره
- محاسبه b_n — ۵ نمره
- بدست آوردن سری فوریه — ۲ نمره

ب) — ۱۰ نمره

سؤال ۲

الف)
- بررسی حالت $\lambda<0$. — ۵ نمره
- بررسی حالت $\lambda=0$. — ۲ نمره
- بررسی حالت $\lambda>0$. — ۸ نمره

ب) — ۱۰ نمره

سؤال ۳

الف) — ۱۰ نمره

ب) — ۱۵ نمره

سؤال ۴

- حدس پایه و استفاده از سری فوریه برای جواب — ۵ نمره
- بدست آوردن $A_n(t)$ — ۱۰ نمره
- بدست آوردن a_n از شرط اولیه — ۱۰ نمره