سوال ۱

$$r^4+2r^2+1=0 \Rightarrow (r^2+1)^2=0$$

$$\Longrightarrow r=\pm i$$ ۲ مکرر

$$\Longrightarrow y_h(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3\, t\cos t+c_4\, t\sin t$$

۵

حال حدس جواب را بصورت زیر داریم:

$$y_p(t)=t^2(\alpha+\beta t)e^{it}$$

۳

$$y_p'(t)=2t(\alpha+\beta t)e^{it}+t^2\beta e^{it}+it^2(\alpha+\beta t)e^{it}$$

$$y_p''(t)=2(\alpha+\beta t)e^{it}+2\beta t e^{it}+2it(\alpha+\beta t)e^{it}$$
$$+2t\beta e^{it}+i\beta t^2 e^{it}+2it(\alpha+\beta t)e^{it}$$
$$+i\beta t^2 e^{it}-t^2(\alpha+\beta t)e^{it}$$
$$=\left(2\alpha+6\beta t+4it\alpha+6i\beta t^2-t^2\alpha-\beta t^3\right)e^{it}$$

$$y_p'''(t)=\left(6\beta+4i\alpha+12\beta i t-2t\alpha-3\beta t^2\right)e^{it}$$
$$+\left(2i\alpha+6i\beta t-4t\alpha-6\beta t^2-it^2\alpha-i\beta t^3\right)e^{it}$$

ص۱

$$= \left(6\beta + 6i\alpha + 18i\beta t - 6\alpha t - 9\beta t^2 - it^2\alpha - i\beta t^3\right)e^{it}$$

$$\Rightarrow y_p^{(4)}(t) = \left(18i\beta - 6\alpha - 18\beta t - 2i\alpha t - 3i\beta t^2\right)e^{it}$$

$$+ \left(6i\beta - 6\alpha - 18\beta t - 6i\alpha t - 9i\beta t^2 + t^2\alpha + \beta t^3\right)e^{it}$$

$$= \left(24i\beta - 12\alpha - 36\beta t - 12i\beta t^2 - 8i\alpha t + t^2\alpha + \beta t^3\right)e^{it}$$

پس با جاگذاری در معادلهٔ غیرهمگنی که سمت راست آن te^{it} است، داریم:

$$\left(24i\beta - 8\alpha - 24\beta t\right)e^{it} = te^{it}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24i\beta - 8\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{i}{8}} \\ -24\beta = 1 \rightarrow \boxed{\beta = -\frac{1}{24}} \end{cases}$$

۸

حال جواب $y_p(t)$ بصورت زیر است:

$$y_p(t) = \mathrm{Im}\left\{ t^2\left(-\frac{i}{8} - \frac{t}{24}\right)e^{it} \right\} = \underbrace{\frac{t^3\sin t}{24} - \frac{t^2\cos t}{8}}_{2}$$

درس

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t).$$

با اعمال چهار شرط اولیه

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \\ y'''(0)=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

ثابت‌های c_1 و c_2 و c_3 و c_4 بدست می‌آیند و نهایتاً داریم:

$$\left.\begin{aligned} y(t)&=\frac{-1}{8}\sin t+\frac{1}{8}t\cos t+\frac{1}{8}t\sin t \\ &+\frac{t^3\sin t}{24}-\frac{t^2\cos t}{8} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{3}}$$

می‌توانستیم حدس جواب را بصورت

$$y_p(t)=t^2\left[(At+B)\sin t+(Ct+D)\cos t\right]$$

نیز در نظر بگیریم و مشابهاً عمل کنیم.

سوال ۲

$$y''+2y'+2y=\sin t\,\big(H_0(t)-H_\pi(t)\big) \quad \Big\}\ \underline{\underline{۲}}$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=\frac{1}{1+s^2}-e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(t+\pi)\}$$

$$=\frac{1}{1+s^2}+e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$=\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+2s+2)(s^2+1)} \quad \Bigg\}\ \underline{\underline{۴}}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=h(t)+H_\pi\, h(t-\pi)$$

$$=\begin{cases} h(t) & 0\le t\le \pi \\ h(t)+h(t-\pi) & t\ge \pi \end{cases} \quad \Bigg\}\ ۴//$$

کودران

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+1)}\right\}.$$

$$\frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+1)} = \frac{\frac{2}{5}s+\frac{3}{5}}{s^2+2s+2} + \frac{-\frac{2}{5}s+\frac{1}{5}}{s^2+1}$$

$$= \frac{2}{5}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$-\frac{2}{5}\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{2}{5}e^{-t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-t}\sin t - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$$

$$= \frac{2}{5}\cos t\,(e^{-t}-1) + \frac{1}{5}\sin t\,(e^{-t}+1)$$

روش دوم محاسبهٔ تبدیل وارون :

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}}_{2}$$

$$= e^{-t}\sin t * \sin t$$

۵ نمره

$$= \int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\sin\tau\, d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\sin\tau\, d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t \left\{ \frac{\sin t+\cos t}{2}\, e^{\tau}\cos 2\tau - \frac{\cos t}{2}\, e^{\tau} \right\} d\tau$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\int_0^t e^{\tau}\cos 2\tau \, d\tau - \frac{e^{-t}\cos t}{2}\int_0^t e^{\tau} d\tau$$

$$= \frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\left(\frac{e^{t}}{5}(2\sin 2t+\cos 2t)-\frac{1}{5}\right) - \frac{e^{-t}\cos t}{2}(e^{t}-1)$$

سوال ۳

الف)

$$x' = 2x + y \Rightarrow x'' = 2x' + y'$$
$$= 2x' + (-4x - 3y)$$
$$= 2x' - 4x - 3(x' - 2x)$$
$$= -x' + 2x$$

$$\Rightarrow x'' + x' - 2x = 0 \quad , \quad x(0) = 1$$

$$\Rightarrow x'(0) = (2x + y)(0) = 2x(0) + y(0) = 2 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow x'(0) = 4$$

۳

$$x'' + x' - 2x = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 , \quad \lambda = -2$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{matrix}$$

۳

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2e^{t} - e^{-2t}}$$

ب)

$$x(t)=2e^{t}-e^{-2t} \Rightarrow x(1)=2e-e^{-2}$$

$$\Rightarrow x'(t)=2e^{t}+2e^{-2t} \Rightarrow x'(1)=2e+2e^{-2}$$

$$\Rightarrow y(1)=x'(1)-2x(1)=-2e+4e^{-2}$$

$$\Rightarrow y(1)=-2e+4e^{-2}$$

حال چون به مقدار y در لحظه $t=1$ ، ۲ گرم اضافه می‌شود ، پس

شرایط اولیه دستگاه در $[1,\infty)$ بصورت

$$\left\{\begin{array}{l} x(1)=2e-e^{-2} \\ y(1)=2-2e+4e^{-2} \end{array}\right.$$

$\underline{3}$

خواهد بود. حال باید

$$x''+x'-2x=0 \,,\quad x(1)=2e-e^{-2}$$

$$x'(1)=2x(1)+y(1)=2+2e^{-2}+2$$

را حل کنیم و $x(2)$ را بیابیم ، پس

$\underline{4}$

$$\left\{\begin{array}{l} c_1e+c_2e^{-2}=2e-e^{-2} \\ c_1e-2c_2e^{-2}=2e+2e^{-2}+2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=2+\frac{2}{3e} \\ c_2=-1-\frac{2}{3}e^{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow x(2)=c_1e^{2}+c_2e^{-4}=2e^{2}+\frac{2}{3}e-e^{-4}-\frac{2}{3}e^{-2}$$

می‌توانستیم مقدار $y(1)$ را محاسبه نکنیم و ۲ ترم را به $x'(1)$ اضافه کنیم.

د) $s^2X(s)-s-4+sX(s)-1-2X(s)=2e^{-s}$

$$\Longrightarrow (s^2+s-2)X(s)=2e^{-s}+s+5$$

$$\Longrightarrow X(s)=\frac{2e^{-s}+s+5}{(s+2)(s-1)}$$

$$\overset{4}{=}\ \frac{2}{3}\left(\frac{e^{-s}}{s-1}-\frac{e^{-s}}{s+2}\right)-\left(\frac{1}{s+2}-\frac{2}{s-1}\right)$$

$$\Longrightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$\overset{3}{=}\ \frac{2}{3}\left(e^{t-1}H_1(t)-e^{-2(t-1)}H_1(t)\right)-e^{-2t}+2e^{t}$$

$$x(+2)=\frac{2}{3}(e-e^{-2})-e^{-4}+2e^{2}$$

سوال ۴ قرار دهید $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. در این صورت دستگاه بصورت $X'=AX$

می‌باشد که در آن $A=\begin{pmatrix}-8&-1\\4&-12\end{pmatrix}$.

$$\det(\lambda I-A)=0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix}\lambda+8&1\\-4&\lambda+12\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2+20\lambda+100=0 \Rightarrow (\lambda+10)^2=0$$

$\lambda=-10$ از تکرر ۲ است. فضای ویژه $\lambda=-10$ را حساب می‌کنیم.

۲

$$\begin{bmatrix}-2&1\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}-2v_1+v_2=0\\-4v_1+2v_2=0\end{cases}$$

پس $v_2=2v_1$. یعنی فضای ویژه یک بعدی است و مثلاً $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ یک بردار ویژه متناظر است.

۲

بردار ویژه تعمیم یافته متناظر نیز اگر $\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ باشد بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{bmatrix}-2&1\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

۱

$$\begin{cases}-2u_1+u_2=1\\-4u_1+2u_2=2\end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

۳

یک بردار ویژه تعمیم یافته است.

پس :

$$X_1(t) = e^{-10t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{-10t}\left(t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

دو جواب مستقل خطی هستند. همهٔ جواب های دستگاه نیز بصورت ترکیب خطی X_1 و X_2 میباشد:

۳

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

$$= e^{-10t}\left(c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2 t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-10t}(c_1 + c_2 t) \\ y(t) = e^{-10t}(2c_1 + 2c_2 t + c_2) \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c_1 + c_2 t}{e^{10t}} \\ y(t) = \dfrac{2c_1 + c_2 + 2c_2 t}{e^{10t}} \end{cases}$$

حال از قاعده هوپیتال نتیجه می‌شود که

$$\left.\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0\ \right\}$$

۳

ب)

$$x(t) = e^{-10t}(c_1+c_2t) \Rightarrow e^{-10t} = \frac{x(t)}{c_1+c_2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{x(t)}{c_1+c_2t}\left(2(c_1+c_2t)+c_2\right)$$

$$= 2x(t) + \frac{c_2\,x(t)}{c_1+c_2t}$$

کل قسمت ب

۵

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2x(t) + \frac{c_2\,x(t)}{c_1+c_2t}}$$

$$\Rightarrow y'(t) = 2x'(t) + \frac{c_2x'(t)(c_1+c_2t) - c_2^2\,x(t)}{(c_1+c_2t)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(t) = 2x'(t) + \frac{c_2x'(t)}{c_1+c_2t} - \frac{c_2^2\,x(t)}{(c_1+c_2t)^2}}$$

می‌دانیم:

$$x'(t) = \frac{c_2e^{10t} - 10(c_1+c_2t)e^{10t}}{e^{20t}}$$

با

$$x'(t) = \frac{c_2 - 10(c_1 + c_2 t)}{e^{10t}}$$

حال داریم :

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = 2 + \frac{c_2}{c_1 + c_2 t} - \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2 t)^2} \cdot \frac{x(t)}{x'(t)}$$

$$= 2 + \frac{c_2}{c_1 + c_2 t} - \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2 t)^2} \cdot \frac{c_1 + c_2 t}{c_2 - 10(c_1 + c_2 t)}$$

پس :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 2 + \lim_{t \to \infty} \frac{c_2}{c_1 + c_2 t} - \lim_{t \to \infty} \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2 t)(c_2 - 10(c_1 + c_2 t))}$$

$$= 2 + 0 - 0 = 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{t \to \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 2}$$

کل قسمت ب ۸

روش دوم قسمت ب)

توجه کنید که می‌توانستیم از خود معادله کمک بگیریم تا محاسبات بصورت زیر ساده‌تر شود:

$$\frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}=\frac{AX(t)}{\|AX(t)\|}=\frac{c_1A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2tA\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}{\left\|c_1A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2tA\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\|}$$

$$\xRightarrow{\text{اگر } t\to\infty}\quad \frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}\longrightarrow\frac{c_2A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\left\|c_2A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\|}=\pm\frac{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\|}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

در بالا منظور از $\left\|\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{A^2+B^2}$ است.

پس:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X'(t)}{\|X'(t)\|}=\lim_{t\to\infty}\frac{(x'(t),y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$\Longrightarrow\quad\lim_{t\to\infty}\frac{y'(t)}{x'(t)}=2$$

سوال ۵

الف)

$$\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1\\ +1 & \lambda-1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+2=0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1\pm i \;\Big\}\; \underline{2}$$

محاسبه بردارهای ویژه متناظر λ :

$$\begin{bmatrix}\pm i & -1\\ +1 & \pm i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\pm i v_1 - v_2 = 0\\ v_1 \pm i v_2 = 0\end{cases}$$

پس $v_2 = \pm i v_1$. یعنی مثلاً $\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix}\Big\}\underline{2}$ یک بردار ویژه است.

$$X_1(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{(1\pm i)t}\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix}\right\}$$

$$X_2(t) = \mathrm{Im}\left\{e^{(1\pm i)t}\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix}\right\}$$

$$e^{(1\pm i)t}\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix} = e^t(\cos t \pm i\sin t)\begin{bmatrix}1\\ \pm i\end{bmatrix}$$

$$= e^t(\cos t \pm i \sin t)\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \pm i\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= e^t\left(\cos t\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} - \sin t\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

$$\pm i e^t\left(\cos t\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} + \sin t\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{t}\left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ x_2(t) = e^{t}\left(\cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{cases}$$ ۴

ب) حال ماتریس اساسی را بصورت زیر داریم:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t}\cos t & e^{t}\sin t \\ -e^{t}\sin t & e^{t}\cos t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{e^{2t}} \begin{bmatrix} e^{t}\cos t & -e^{t}\sin t \\ e^{t}\sin t & e^{t}\cos t \end{bmatrix}$$ ۵

$$= \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow e^{At} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0) = \Phi(t)$$

پس طبق فرمول تغییر پارامتر داریم :

$$X(t)=e^{tA}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t e^{(t-s)A}\begin{bmatrix}s\\-1\end{bmatrix}ds$$

$$=e^{tA}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\begin{bmatrix}s\\-1\end{bmatrix}ds$$

$$=e^{tA}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+e^{tA}\int_0^t \begin{bmatrix}e^{-s}\cos s & -e^{-s}\sin s\\ e^{-s}\sin s & e^{-s}\cos s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\-1\end{bmatrix}ds$$

$$=e^{t}\begin{bmatrix}\cos t+\sin t\\ -\sin t+\cos t\end{bmatrix}+e^{t}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}\left(e^{t}+t\sin t-(t+1)\cos t\right)\\ \frac{1}{2}e^{-t}\left(-(t+1)\sin t-t\cos t\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}e^{t}\cos t+e^{t}\sin t-\frac{1}{2}(t+1)\\ e^{t}\cos t-\frac{3}{2}e^{t}\sin t-\frac{1}{2}t\end{bmatrix}$$

کل صفحه ۵