پاسخ سؤال ① بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $f(x_1)=\min_{1\leq j\leq n} f(x_j)$ و $f(x_n)=\max_{1\leq j\leq n} f(x_j)$

باید ثابت کنیم که $f^n(x_1)\leq f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\leq f^n(x_n)$ ← 3 نمره

$$\left.\begin{array}{l} 0\leq f(x_1)\leq f(x_1)\\ 0\leq f(x_1)\leq f(x_2)\\ \vdots\\ 0\leq f(x_1)\leq f(x_n)\end{array}\right\}\Rightarrow f^n(x_1)\leq f(x_1)\cdots f(x_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0\leq f(x_1)\leq f(x_n)\\ 0\leq f(x_2)\leq f(x_n)\\ \vdots\\ 0\leq f(x_n)\leq f(x_n)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\leq f^n(x_n)$$

$$\Rightarrow f^n(x_1)\leq f(x_1)\cdots f(x_n)\leq f^n(x_n)$$

نامساوی اثبات 3 نمره

$$\Rightarrow f(x_1)\leq \sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}\leq f(x_n)$$

تابع $f$ در بازه $[x_1,x_n]$ یا $[x_n,x_1]$ پیوسته است، $f(x_1)\leq c\leq f(x_n)$ که $c=\sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}$

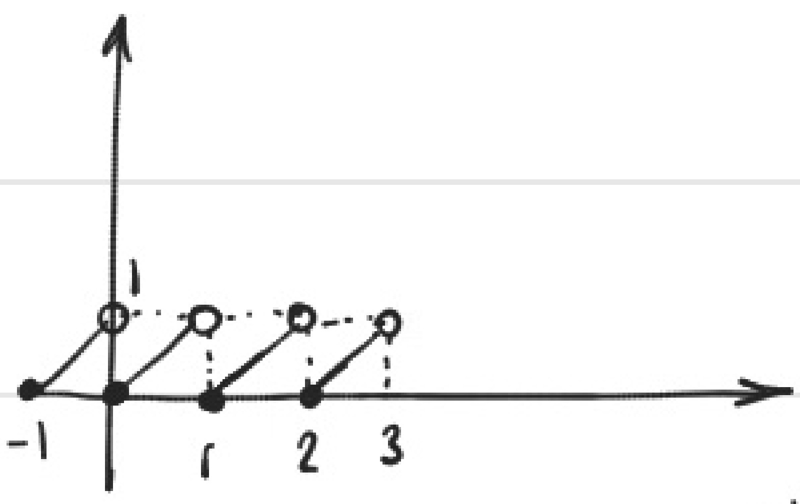
لذا طبق قضیه مقدار میانی $x_0\in[x_1,x_n]$ یا $x_0\in[x_n,x_1]$ چنان یافت می‌شود که

$$f(x_0)=c=\sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}$$

بیان قضیه مقدار میانی و استدلال به وسیله آن 4 نمره

پاسخ سؤال ② تابع $h(x) = x - [x]$ در تمام اعداد غیرصحیح پیوسته است

و در اعداد صحیح پیوسته است. 2 نمره




تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ در هر عدد حقیقی ناصفر پیوسته است. 2 نمره

به علاوه تابع $g(x) = \frac{1}{x}$ در نقاط $x = \frac{1}{n}$ که $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ مقدار صحیح به خود می‌گیرد

و در بقیه اعداد مقدار غیرصحیح می‌گیرد. 2 نمره می‌دانیم اگر تابع $g$ در $t_0$ پیوسته و تابع $h$ در $g(t_0)$ پیوسته باشد

آن گاه $f(g(t))$ در $t_0$ پیوسته است. 2 نمره در نتیجه تابع $f(t) = h(g(t)) = \frac{1}{t} - [\frac{1}{t}]$ در هر نقطه $t \neq \frac{1}{n}$ که $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ و $t \neq 0$

پیوسته است و در مجموعه نقاط $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \cup \{0\}$ ناپیوسته است 2 نمره

به راه‌حل‌هایی که بر مبنای تعریف پیوستگی با استفاده از $\varepsilon$ و $\delta$ یا دنباله ارائه شده‌اند براساس درستی استدلال و کامل بودن نمره اختصاص داده شده.

پاسخ سؤال ③ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همه جا مشتق پذیر است. برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ دلخواه با استفاده از قضیه مقدار میانگین می توان نتیجه گرفت که $c$ بین $a$ و $b$ چنان یافت می شود که

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (*)$$

بیان درست قضیه مقدار میانگین و تشخیص استفاده از آن برای حل سؤال $\boxed{\text{7 نمره}}$

$$f'(x)=\frac{x^2\sin x}{1+x^4} \Rightarrow |f'(x)|=\frac{x^2}{1+x^4}|\sin x|\leqslant\frac{x^2}{1+x^4}$$

توجه داریم که

$$(x^2-1)^2\geqslant 0 \Rightarrow x^4+1-2x^2\geqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2} \qquad \forall x\in\mathbb{R} \quad (**)$$

بدست آوردن کران $\frac{1}{2}$ برای $|f'(x)|$ $\boxed{\text{7 نمره}}$

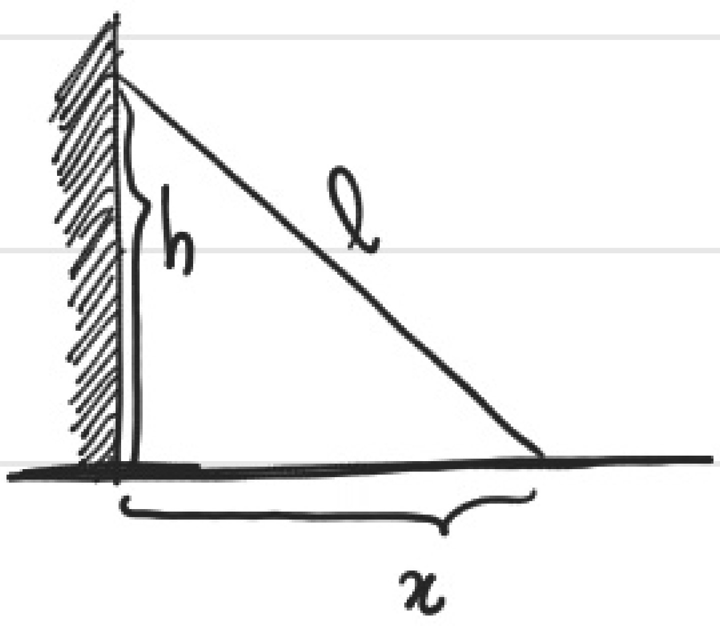
حال از $(*)$ و $(**)$ خواهیم داشت:

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=|f'(c)|\leqslant\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{|b-a|}{2}$$

نتیجه گیری نهایی $\boxed{\text{1 نمره}}$




پاسخ سوال ④

$$\ell^2 = h^2 + x^2 \xrightarrow{h \text{ مثبت}} h = \sqrt{\ell^2 - x^2}$$

4 نمره برای بیان ارتباط h، l و x

حال باید $\frac{dh}{dt}$ را محاسبه کنیم (توجه کنید که l ثابت است، و x تابعی از t است)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{2\sqrt{\ell^2 - x^2}} \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \frac{dx}{dt}$$

4 نمره برای محاسبه $\frac{dh}{dt}$

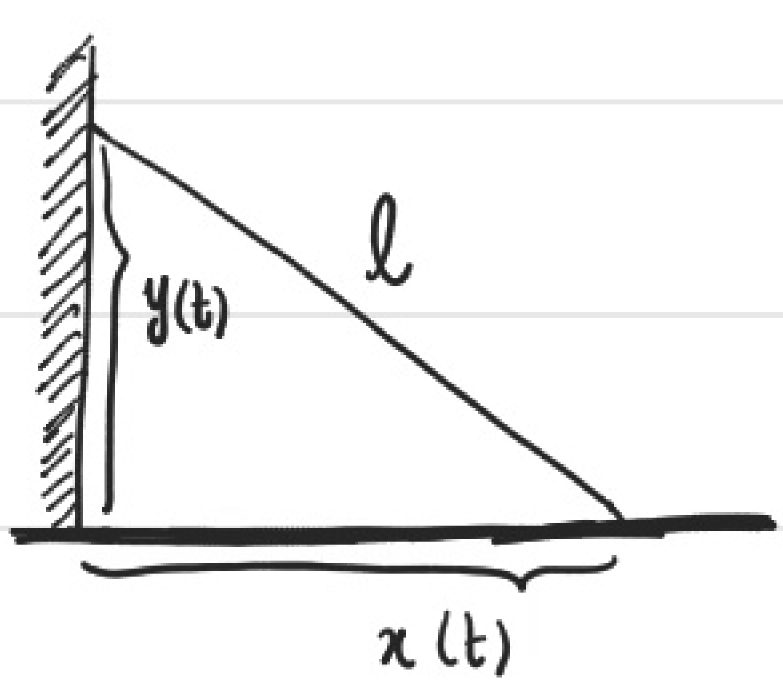
حال مقدار را در زمان $t_0$ محاسبه می‌کنیم $x(t_0) = x_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = a_0$ . پس داریم:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{-x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}} a_0$$

حال اگر ارتفاع اولیه دیوار را $h_0$ بگیریم یعنی $h_0 = \sqrt{\ell^2 - x_0^2}$ داریم:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{-x_0 a_0}{h_0}$$

راه حل دوم




$$\Rightarrow \ell^2 = y(t)^2 + x(t)^2$$

4 نمره

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} 0 = 2y(t)y'(t) + 2x(t)x'(t)$$

4 نمره

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{-x(t)x'(t)}{y(t)}$$

2 نمره

$$\Rightarrow y'(t_0) = \frac{-x(t_0)\ x'(t_0)}{y(t_0)} \Rightarrow y'(t_0) = \frac{-x_0 a_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}}$$

پاسخ سؤال 5 به برهان خلف فرض کنید که برای هر $x$ داریم $f(x)f'(x)\geq 1$ 2 نمره

تابع $g$ را به صورت $g(x)=f^2(x)\geq 0$ تعریف کنید، در نتیجه:

$$g'(x)=2f(x)f'(x)\geq 2 \quad (*) \qquad \boxed{\text{3 نمره}}$$

برای هر $x\in\mathbb{R}$ دلخواه، طبق قضیه مقدار میانگین $c\in(x,x+1)$ چنان یافت می‌شود که 2 نمره

$$g'(c)=\frac{g(x+1)-g(x)}{1}\overset{*}{\Longrightarrow} g(x+1)-g(x)\geq 2 \Rightarrow g(x+1)\geq g(x)+2,\ \forall x \quad (**)$$

با استفاده از رابطه $(**)$ می‌توان نتیجه گرفت که عددی مانند $k\in\mathbb{R}$ چنان یافت می‌شود که $g(k)<0$ یعنی $f^2(x)<0$

که این یک تناقض ناشی از فرض خلف است، پس فرض خلف باطل است و داریم

$$\exists x\in\mathbb{R};\quad f(x)f'(x)<1 \qquad \boxed{\text{3 نمره}}$$

توجه: برای این که با استفاده از $(**)$ بتوانیم نشان دهیم که $k\in\mathbb{R}$ یافت می‌شود که $g(k)<0$، رابطه $(**)$ را به صورت

$$g(x-1)\leq g(x)-2$$

بازنویسی کنید و برای $x=0$ داریم

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} g(-1)\leq g(0)-2 \\ g(-2)\leq g(-1)-2\end{array}\right\}\Rightarrow g(-2)\leq g(0)-4 \\ g(-3)\leq g(-2)-2\end{array}\right\}\Rightarrow g(-3)\leq g(0)-6$$

و به صورت استقرایی

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad g(-n)\leq g(0)-2n$$

با در نظر گرفتن $n\geq\left[\frac{g(0)}{2}\right]+1$ داریم $g(-n)<0$ و لذا می‌توان قرار داد $k=-n$ که $g(k)<0$

توجه: به راه حل‌هایی که از قضیه رول یا قضیه میانگین و حالت بندی استفاده کرده‌اند، متناسب با کامل بودن و درست بودن استدلال نمره داده شده است.

۱ نمره

پاسخ سؤال ⑥ الف) توجه کنید که جواب معادله $x=\sin x$، باید در بازه $[-1,1]$ باشد (چون $-1\leq \sin x\leq 1$).

تعریف کنید $f(x)=x-\sin x$ ⟵ $f'(x)=1-\cos x$ ۱ نمره

با توجه به این که $f(0)=0$، برای این که نشان دهیم که $x=0$ تنها ریشه تابع $f$ است، نشان می‌دهیم که $f$ در $[-1,1]$ صعودی اکید است.

(در صورت عدم ذکر واژه اکید، در این راه حل نمره کسر خواهد شد)

۱ نمره ⊛ $f$ در بازه $(0,1]$ صعودی اکید است $\Leftarrow$ $\forall x\in(0,1]\quad f'(x)>0$

۱ نمره ⊛⊛ $f$ در بازه $[-1,0)$ صعودی اکید است $\Leftarrow$ $\forall x\in[-1,0)\quad f'(x)>0$

۱ نمره چون $f$ در $x=0$ پیوسته است و با استفاده از ⊛ و ⊛⊛ می‌توان نتیجه گرفت که $f$ در $[-1,1]$ صعودی اکید است.

پس تابع $f$ در بازه $[-1,1]$ حداکثر یک ریشه دارد. چون

راه حل دوم: با تعریف $f(x)=x-\sin x$ داریم $f'(x)=1-\cos x$ ۱ نمره ۱ نمره

۱ نمره ریشه تابع $f$ باید در بازه $[-1,1]$ باشد. چون $[-1,1]\subseteq[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ پس تنها ریشه $f'$ در بازه $[-1,1]$

$x=0$ است. توجه داریم که $f(0)=0$. اگر $0<c<1$ ($-1<c<0$) ریشه دیگر تابع $f$ باشد

آن‌گاه بنا به قضیه مقدار رول باید $f'(c)=0$ برای $0<c<1$ ($-1<c<0$) که با توجه به استدلال‌های

انجام شده، این امکان وجود ندارد. پس $x=0$ تنها ریشه $f$ و در نتیجه تنها جواب معادله $x=\sin x$

است. ۲ نمره

— راه حل هندسی اگر به صورت دقیق و کامل نوشته شده باشد، نمره کامل می‌گیرد.

— راه حل‌هایی که به صورت شهودی توضیح داده‌اند، حداکثر ۴ نمره گرفته‌اند.

ب) در قسمت (الف) دیدیم که $f$ تابعی صعودی است. در نتیجه:

$x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) = 0 \Rightarrow x - \sin x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \sin x \quad \forall x \geqslant 0$

$x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(0) = 0 \Rightarrow x - \sin x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \sin x \quad \forall x \leqslant 0$

در نتیجه $|x| \geqslant |\sin x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$ $\boxed{\text{2 نمره}}$

با توجه به این که $a_{n+1} = \sin a_n$، داریم $|a_{n+1}| = |\sin a_n| = |\sin |a_n||$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} |a_n| \geqslant |\sin |a_n|| = |a_{n+1}| \Rightarrow$ $|a_n|$ دنباله‌ای است نزولی

$|a_n|$ دنباله‌ای است از پایین کراندار $\Rightarrow$ $|a_n|$ همگرا است $\boxed{\text{2 نمره}}$

و $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \inf |a_n|$

ادعا می‌کنیم که $|a_n|$ به صفر همگرا است. $\boxed{\text{1 نمره}}$ فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \mu$

$\mu = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\sin |a_n|| = |\sin \mu| \Rightarrow |\sin\mu| = \mu \overset{1 \geqslant \mu \geqslant 0}{\Longrightarrow} \sin\mu = \mu$

$\xrightarrow{\text{قسمت (الف)}} \mu = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ $\boxed{\text{2 نمره}}$

طبق قضیه‌ای از کتاب درسی $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\boxed{\text{3 نمره}}$