$$F(x)=\int_{-2}^{x^2-1}\sqrt[3]{t^3-3t^2}\,dt \Rightarrow F'(x)=2x\sqrt[3]{(x^2-1)^3-3(x^2-1)^2}=2x\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x^2-4)}$$ 2 نمره ①

$$F'(x)=0 \Rightarrow 2x\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x^2-4)}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x^2-1)^2=0 \\ (x^2-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

$x=0$ باتکرار یک

$x=\pm1$ باتکرار دو — 5 نمره

$x=\pm2$ باتکرار یک

روش اول تعیین نقاط بحرانی با آزمون مشتق اول:

x		-2		-1		0		1		2	
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
F	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		min				max				min	

3 نمره $\rightarrow$ $x=-2$ و $x=2$ نقاط مینیمم موضعی

$x=0$ نقطه ماکسیمم موضعی

توجه داریم نمی‌توان از آزمون مشتق دوم در یافتن نوع نقاط بحرانی استفاده کرد، چون که در این نقاط مشتق دوم وجود ندارد:

در صورت استفاده از آزمون مشتق دوم در یافتن ماکسیمم موضعی $x=0$، حداکثر 8 نمره داده شود.

$$F''(x)=2\sqrt[3]{(x^2-1)^3-3(x^2-1)^2}+2x\,\frac{3\times 2x(x^2-1)^2-6\times 2x(x^2-1)}{3\sqrt[3]{\left((x^2-1)^3-3(x^2-1)^2\right)^2}}$$

$$=2\sqrt[3]{(x^2-1)^3-3(x^2-1)^2}+\frac{4x^2(x^2-1)\left[x^2-3\right]}{\sqrt[3]{\left((x^2-1)^3-3(x^2-1)^2\right)^2}}$$

$F''(0)<0 \rightarrow$ $x=0$ نقطه ماکسیمم موضعی است

ولی F'' در $x=\pm2$ و $x=\pm1$ وجود ندارد.

(2) (الف) برای $0 \leq t \leq 1$ داریم:

$$0 \leq \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t} \leq \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+0} = 1-t^{\frac{1}{n}}$$ ۲ نمره

$$\Rightarrow \int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 \left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)dt \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq \left[t - \frac{t^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right]_0^1$$ ۱ نمره ۱ نمره

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq 1-\frac{n}{n+1} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{n+1}$$ ۱ نمره

(ب) $$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx \xrightarrow[\frac{du}{dx}=nx^{n-1}]{u=x^n} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}\,du}{1+u} \Rightarrow n a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u}\,du \quad (*)$$ 2

$$\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt = \ln(1+t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt$$ 4

با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$0 \leq \ln 2 - \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\ln 2 \leq -\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq -\ln 2 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \leq \ln 2 \overset{(*)}{\Rightarrow} \ln 2 - \frac{1}{n+1} \leq n a_n \leq \ln 2$$ 3

با استفاده از قضیه فشردگی

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \ln 2$$ 1

(ج) بنابر قسمت (ب) دیدیم که $\lim_{n\to\infty} n a_n = \ln 2$ درنتیجه:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \ln 2 < \infty$$ 2

با توجه به رابطه بالا و اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا است 1 و با استفاده از آزمون حدی 1 می‌توان نتیجه گرفت که

سری $\sum a_n$ واگرا است. 1

3

$$\int \frac{dx}{\tan x\,(1+\tan x)} \;\xrightarrow[\frac{du}{dx}=1+\tan^2 x]{u=\tan x}\; \int \frac{du}{(1+u^2)\,u\,(1+u)} \qquad 2$$

$$\frac{1}{u(1+u)(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} + \frac{Cu+D}{1+u^2} \longrightarrow \begin{cases} \boxed{A=1} & 1 \\ A+B+D=0 \\ A+C+D=0 \\ A+B+C=0 \end{cases}$$

$\boxed{A=1}$ ← ضریب ثابت

$A+B+D=0$ ← ضریب u

$A+C+D=0$ ← ضریب u^2

$A+B+C=0$ ← ضریب u^3

$$\Rightarrow \begin{cases} B+D=-1 \\ C+D=-1 \\ B+C=-1 \end{cases} \xrightarrow{D=-1-B} \begin{cases} C-B=0 \\ B+C=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{2}}\ 1, \quad \boxed{B=-\frac{1}{2}}\ 1$$

$$\boxed{D=-\frac{1}{2}} \quad 1$$

$$\int \frac{du}{u(1+u)(1+u^2)} = \int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1+u}{1+u^2}\,du$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\tan^{-1}u - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + C \qquad 2$$

$$= \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\ln|1+\tan x| - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x) - \frac{1}{2}x + C \qquad 2$$

$$= \ln\left|\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}}\right| + \frac{1}{2}\ln|\cos x| - \frac{1}{2}x + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan x\,\sqrt{|\cos x|}}{\sqrt{1+\tan x}}\right| - \frac{1}{2}x + C$$

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx + \int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$$ ۲ نمره (4)

نشان می‌دهیم که $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ همگراست. برای هر x داریم $e^{-x^2} > 0$ و در نتیجه

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} < \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx < \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0-(-1) = 1$$

2

پس با استفاده از آزمون مقایسه، $\int_1^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ همگراست. 2

نشان می‌دهیم که $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ همگراست. با استفاده سری تیلر e^{-x^2} داریم:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

$$1-e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \cdots \Rightarrow \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1$$ 2

با توجه به تعریف حد فوق برای تابع $\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ در $x=0$، این تابع در یک همسایگی محذوف $x=0$ کراندار است. در نتیجه

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$$ 2

موجود است.

0/2 1 2

$$ج = \int_0^{\pi} (1+\sin^5 t)\, dt = \int_0^{\pi} dt + \int_0^{\pi} \sin^5 t\, dt = \pi + \int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)^2 \sin t\, dt$$ 5

$$\underset{\frac{du}{dt}=-\sin t}{\overset{u=\cos t}{=\!=}} \pi - \int_1^{-1} (1-u^2)^2\, du = \pi + \int_{-1}^{1} (1-2u^2+u^4)\, du$$ 1

2

$$= \pi + u\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}u^3\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{5}u^5\Big|_{-1}^{1} = \pi + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \pi + \frac{16}{15}$$

2

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

اگر با مقایسه $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ $(n\in N)$ و توجه به همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$، همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ نتیجه گرفته شود ولی مقدار آن محاسبه نشود، 5 نمره از 10 نمره داده شده است.

توجه داریم که ابتدا باید سری به صورت حد دنباله مجموع جزئی نوشته شود یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n}$$

و سپس از محاسبه $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+n}$، حد $k\to\infty$ محاسبه شود.

از راه حل های مشابه زیر به تناسب نمره کسر شده:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\cdots} = 1$$

⑦ الف) فرض کنیم $a\in\mathbb{R}-\{0\}$:

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{x-a+a}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{(\frac{x-a}{a})+1}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{1-(\frac{a-x}{a})} \qquad 1$$

توجه داریم که برای هر $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots \qquad 1$$

2 ← لذا برای هر x که $-1<\frac{a-x}{a}<1$ یا به عبارت بهتر برای $0<x<2a$ (اگر $a>0$) یا $2a<x<0$ (اگر $a<0$)

داریم:

$$f(x)=\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{a-x}{a}\right)+\left(\frac{a-x}{a}\right)^2+\left(\frac{a-x}{a}\right)^3+\cdots\right]$$

درنتیجه برای $0<x<2a$ $(a>0)$ یا $2a<x<0$ $(a<0)$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a^3}(x-a)^2-\frac{1}{a^4}(x-a)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n \quad (*)$$

لذا تابع f روی $\mathbb{R}-\{0\}$ تحلیلی است. 2

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n \qquad 2$$

(توجه داریم که برای $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ، $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ ، ... ، $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ و درنتیجه $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}$. یعنی سری سمت چپ تساوی بالا، واقعاً همان سری تیلور تابع f حول نقطه $a\neq 0$ است.)

سری تیلور f حول نقطه 10 :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^{n+1}}(x-10)^n \qquad 2$$

برای راه حل‌های دیگر به تناسب زیر نمره داده شده است :

نوشتن سری تیلور ← 4

بیان شعاع همگرایی سری تیلور در نقطه دلخواه ← 2

اثبات همگرایی سری تیلور در نقطه دلخواه به تابع در یک همسایگی ← 4

ب) از قسمت قبل دیدیم که تابع $g(x)=\frac{1}{x}$ روی $\mathbb{R}-\{0\}$ تحلیلی است و

$$g(x)=\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n.$$

توجه داریم $f(x)=\ln|x|=\int g(x)\,dx$ 1. درنتیجه بنابر قضیه کتاب، چون g تحلیلی است تابع f روی $\mathbb{R}-\{0\}$ تحلیلی است و داریم: 2

$$f(x)=\int g(x)\,dx \overset{2}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n\,dx \overset{1}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}+C \quad 1$$

$$\Rightarrow \ln|x|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}+C$$

که در آن برای یافتن C، کافی است $x=a$ را جایگذاری کنیم:

$$\ln|a|=C \quad 2$$

درنتیجه سری تیلور f حول $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ به صورت زیر است:

$$f(x)=\ln|x|=\ln|a|+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1}$$

برای $a=10$ داریم:

$$f(x)=\ln|x|=\ln 10+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}(x-10)^{n+1} \quad 1$$

ج)

$$f(11)=\ln(11)=\ln(10)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}} \quad 4 \quad \Rightarrow \ln(11)-\ln(10)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}} \quad 1$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}}$$

$$=0.095+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)10^{n+1}} \quad 5$$

درنتیجه مقدار $\ln(11)-\ln(10)$ با دقت یک هزارم برابر است با 0.095 است.