

در سوال های چند قسمتی می توانید از نتیجه قسمت های بالاتر اگر چه آن را حل نکرده باشید در قسمت های پایین تر استفاده کنید.

۱. همه نقاط بحرانی تابع زیر را روی کل  $\mathbb{R}$  بدست آورده و نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی آن را مشخص کنید. (۱۰ نمره)

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-1} \sqrt{t^2 - 3t^3} dt$$

۲. الف. نشان دهید  $0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^{1/n}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$  (۵ نمره)

ب. فرض کنید  $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ . نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \ln 2$ . (۱۰ نمره)

ج. با ذکر دلیل همگرایی سری  $\sum a_n$  را بررسی کنید. (۵ نمره)

۳. انتگرال نامعین  $\int \frac{dx}{(1+\tan x)\tan x}$  را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۴. نشان دهید انتگرال ناسره  $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^2} dx$  همگرا است. (۱۰ نمره)

۵. حجم ظرفی به ارتفاع  $\pi$  که مساحت مقطع افقی آن در ارتفاع  $0 \leq t \leq \pi$

برابر  $1 + \sin^2 t$  است را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۶. نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$  همگرا است و مقدار آن را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

۷. الف. نشان دهید  $f(x) = \frac{1}{x}$  روی  $\mathbb{R} - \{0\}$  تحلیلی است و سری تیلور آن را حول نقطه  $10$  بنویسید. (۱۰ نمره)

ب. نشان دهید  $f(x) = \ln|x|$  روی  $\mathbb{R} - \{0\}$  تحلیلی است و سری تیلور آن را حول نقطه  $10$  بنویسید. (۱۰ نمره)

ج. مقدار  $\ln(11) - \ln(10)$  را با دقت یک هزارم محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

موفق باشید