به نام او، برای او، با یاد او

امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل، آبان ۹۷، گروه‌های ۱ و ۲

نام استاد درس: شریفی تبار

زمان: ۱۵۰ دقیقه

می‌توانید از قضیه‌های کتاب با ذکر دقیق صورت آن استفاده کنید. بارم سؤالات با هم برابر است.

۱. مسائل مقدار اولیه زیر را حل کرده و بازه اعتبار جواب را به دست آورید. جواب ضمنی کافی است. در قسمت ۱ب تابع $y_1(t) = t$ را در نظر داشته باشید.

آ) $y' = \dfrac{y^3 + 2yt^2 - t^3}{t^2(y+t)}, \quad y(1) = 0$

ب) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2, \quad y(0) = 1$

۲. جواب عمومی معادلات زیر را به دست آورید. جواب ضمنی کافی است.

آ) $\left(3x^2 \tan y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(4y^3 + \dfrac{x^3}{\cos^2 y} + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

ب) $yy'' - (y')^3 = 0$

۳. معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را در نظر بگیرید که p و q توابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ هستند.

آ) اگر y_1 و y_2 جواب‌های معادله فوق باشند، ثابت کنید که رونسکین آنها، تغییر علامت نمی‌دهد.

ب) اگر توابع y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله را تشکیل دهند، ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی y_1، یک و تنها یک ریشه از y_2 موجود است.

۴. جواب عمومی معادله $t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = t\sqrt{t}$ را برای $t > 0$ به دست آورید. تابع $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin t$ را در نظر داشته باشید.

۵. جواب معادله زیر را با روش ضرایب نامعین، بدون توجه به شرط اولیه به دست آورید.

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = e^t \cos 2t + e^{-t}$$

۶. معادله مکان ذره‌ای را به صورت $my'' + \gamma y' + ky = f(t)$ در نظر بگیرید که $y(0) = y_0$ و $y'(0) = v_0$.

آ) فرض کنید $f(t) = 0$ و $\gamma^2 - 4km = 0$. ثابت کنید اگر $v_0 = 0$ باشد، y هرگز صفر نیست اما وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، ذره به سمت مبدأ می‌رود.

ب) با فرض $m = 1$، $k = 6$، $\gamma = 5$ و $f(t) = 2e^{-t}$ با شرایط اولیه $y_0 = 0$ و $v_0 = 0$، بیشترین فاصله‌ای که این ذره از مبدا می‌گیرد را محاسبه کنید.

موفق باشید.