

۱ یک بردار مماس و معادله خط مماس بر فصل مشترک سطوح تعریف شده توسط معادلات $x^3 + 2xy + yz = 7$ و $3x^2 - yz = 1$ در نقطه $(1, 2, 1)$ را به دست آورید. (۲۰ نمره)

۲ فرض کنید $f(x, y) = 2y$ و D ناحیه درون دایره به شعاع ۱ حول مبدا و بالای نمودار $y = |x|$ باشد. مقدار متوسط تابع $f(x, y)$ روی ناحیه D را به دست آورید. (۲۰ نمره)

۳ فرض کنید $\mathbf{F}(x, y, z) = (x \cos^2 y, \cos^2 x, y^2 + z \sin^2 y)$. انتگرال $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ که S سطح کره به معادله $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ است را بیابید (میدان قائم یکه $\hat{\mathbf{N}}$ را به سمت خارج از سطح کره در نظر بگیرید). (۲۰ نمره)

۴ با استفاده از قضیه استوکس انتگرال $\iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ را حساب کنید که S قسمتی از سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ است که بالای صفحه xy قرار دارد و $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ و $\hat{\mathbf{N}}$ میدان قائم یکه رو به بالا بر S است. (۲۰ نمره)

۵ اعداد حقیقی $a \geq 0$ و $b > 0$ را در نظر می گیریم. (الف) نشان دهید $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$. (۵ نمره)

(ب) میدان برداری $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ که $P(x, y) = e^{b(y^2 - x^2)} \cos(\sqrt{2}bxy)$, $Q(x, y) = e^{b(y^2 - x^2)} \sin(\sqrt{2}bxy)$

را در نظر می گیریم. فرض کنید D مستطیل تعریف شده به وسیله

$$-c \leq x \leq c, \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$$

باشد. مقدار $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را حساب کنید (در اینجا ∂D مرز D است و جهت آن مثبت فرض شده است). (۵ نمره)

ادامه پشت صفحه

(ج) فرض کنید

C_1 مسیر خط راست از $(-c, 0)$ تا $(c, 0)$ ،

C_2 مسیر خط راست از $(c, 0)$ تا $(c, \frac{a}{2b})$ ،

C_3 مسیر خط راست از $(c, \frac{a}{2b})$ تا $(-c, \frac{a}{2b})$ و

C_4 مسیر خط راست از $(-c, \frac{a}{2b})$ تا $(-c, 0)$ باشد.

نشان دهید

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-c}^c e^{-bt^2} dt, \\ \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= 0, \\ \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -e^{\frac{a^2}{4b}} \int_{-c}^c e^{-bt^2} \cos(at) dt.\end{aligned}$$

(۵ نمره)

(د) با استفاده از قسمت‌های قبل و میل دادن c به سمت $+\infty$ ، مقدار دقیق $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} \cos(at) dt$ را محاسبه کنید.

(۵ نمره)