



تاریخ: ۹۷/۱۰/۲۰
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۹۸-۹۷

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- در پشت جلد دفترچه امتحانی که مشخصات خود را نوشته‌اید چیزی ننویسید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.

سؤال ۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{(n^2 + 1^2)^2} + \frac{1}{(n^2 + 2^2)^2} + \dots + \frac{1}{(n^2 + n^2)^2} \right)$

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n - 2)}$

سؤال ۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

(ب) $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx$

(ج) $\int \frac{1}{3 + 2 \cos x} dx$

سؤال ۳. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \quad (a > 1)$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2}$

سؤال ۴. ناحیه محدود به منحنی $y = \ln x$ ، محور x ، خط $x = 1$ و خط $x = e$ را حول محور y دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از این دوران را بیابید.

سؤال ۵. (الف) شعاع همگرایی و بازه همگرایی (فاصله همگرایی) سری توانی زیر را به دست آورید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{n}$$

(ب) سری تیلور تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{1+x}$ را حول نقطه ۱ به دست آورید و سپس حاصل سری زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n+1}}$$

سؤال ۶. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت، درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر به ازای هر $x \in [0, 1]$ ، $\int_0^1 f(xt) dt = 0$ ، آنگاه f تابع ثابت صفر است.

(ب) اگر f روی $[0, 1]$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $c \in (0, 1)$ وجود دارد با این ویژگی که

$$\int_0^1 f(x) dx = f(c) + \frac{f'(c)}{4}$$

سؤال ۲: ۱۰+۱۰+۵ نمره،

سؤال ۴: ۱۵ نمره،

سؤال ۶: ۷+۸ نمره.

سؤال ۱: ۵+۵ نمره،

سؤال ۳: ۵+۵+۵ نمره،

سؤال ۵: ۱۰+۱۰ نمره،

مجموع: ۱۰۰ نمره