«۹۶/۹/۲۹»

«جلسه نهم»

دستگاه معادلات دیفرانسیل

سال ۸۵) با فرض $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$ جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل $Y'=AY$ را با یافتن یک ماتریس اساسی برای دستگاه بدست آورید.

حل - معادله مشخصه ماتریس A: $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&-1&1\\2&-3-\lambda&1\\1&-1&-1-\lambda\end{bmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda+1)^3=0$

می باشد که مقادیر ویژه $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=-1$ را برای A بدست می دهد. بردار ویژه نظیر $\lambda_1=-2$

عبارت است از $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ که اگر در $e^{\lambda_1 t}$ ضرب شود بدست می دهد: $y_1=\begin{bmatrix}0\\e^{-2t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}$

بعد فضای ویژه وابسته به $\lambda_2=-1$ برابر با ۱ می باشد و لذا فقط یک بردار ویژه مستقل خطی می توان

بدست آورد: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. این بردار ویژه جواب $y_2=\begin{bmatrix}e^{-t}\\e^{-t}\\0\end{bmatrix}$ را برای دستگاه بدست می دهد

که از ضرب $e^{\lambda_2 t}$ در بردار ویژه $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ بدست آمده است. کاندید برای جواب دیگر: $y_3=(P_0+P_1 t)e^{-t}$ می باشد که در آن:

که بردار که بردار

$$\begin{cases}(A+I)P_1=0\\(A+I)P_0=P_1\end{cases}$$

که از حل دستگاه خطی فوق بدست می آید: $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ و $P_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. در نتیجه جواب دیگری مانند

$y_3=\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}t\right)e^{-t}=\begin{bmatrix}te^{-t}\\te^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix}$ بدست می آید. پس جواب عمومی دستگاه داده شده بصورت

زیر بدست خواهد آمد که در آن c_1، c_2 و c_3 ثابت های دلخواهند:

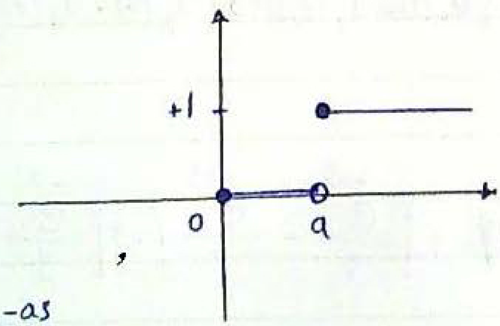
$$Y(t)=\begin{bmatrix}0&e^{-t}&te^{-t}\\e^{-2t}&e^{-t}&te^{-t}\\e^{-2t}&0&e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

«تابع پله‌ای واحد»

تابع پله‌ای واحد در لحظه‌ی $t=a$ به ازای $t \geq 0$ را با $U_a(t)$ نشان می‌دهیم

و به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$U_a(t)=\begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$



$$L(U_a(t))=\int_0^{\infty} e^{-st}\, U_a(t)\,dt$$

$$L(U_a(t))=\int_0^{a} \cancel{e^{-st}(0)}\,dt+\int_a^{\infty} e^{-st}(1)\,dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_a^{\infty}=0-\left(\frac{1}{s}\right)e^{-as}=\frac{e^{-as}}{s}$$

نکته: هرجا $U_a(t)$ دیدیم عبارت e^{-as} را جایگذاری می‌کنیم.

مثال: تابع زیر را برحسب پله‌ای واحد بنویسید:

$$1)\ f(t)=\begin{cases} 2t & 1 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t < 5 \\ -t & t \geq 5 \end{cases}$$

حل:

$$f(t)=2t\left[U_1(t)-U_3(t)\right]+1\left[U_3(t)-U_5(t)\right]-t\left[U_5(t)\right]$$

«قضایای هشت گانه لاپلاس»

«قضیه اول»

با فرض اینکه $\mathcal{L}(f(t))=F(s)$ و $s>a\geq 0$ آنگاه $\mathcal{L}(u_a(t)f(t))$ پس:

1) $\mathcal{L}(u_a(t)\, f(t)) = e^{-as}\, \mathcal{L}(f(t+a))$

① e^{-as} بگذار

② t ها را با a جمع کن بعد از $f(t+a)$ لاپلاس بگیر

2) $\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\, F(s)) = u_a(t)\, f(t-a)$

① $u_a(t)$ بگذار

② لاپلاس معکوس بگیر و t ها را با $t-a$ عوض کن

مثال
$$f(t)=\begin{cases} t & 0\leq t<\frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2}\leq t<\pi \\ 0 & t\geq \pi \end{cases}$$

سوال امتحان ۲۰/۱۱/۸۸

حل:

$$f(t)=t\left[u_0(t)-u_{\frac{\pi}{2}}(t)\right]+\sin t\left[u_{\frac{\pi}{2}}(t)-u_\pi(t)\right]+0\left[u_\pi(t)\right]$$

لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}\left[u_0(t)t-u_{\frac{\pi}{2}}(t)t\right]+\mathcal{L}\left[u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t-u_\pi(t)\sin t\right]$$

① $\boxed{e^{-0s}}$

② t را با ۰ جمع و از t لاپلاس بگیر

$\boxed{\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}}$

① $\boxed{e^{-\frac{\pi}{2}s}}$

② t را با $\frac{\pi}{2}$ جمع و از $(t+\frac{\pi}{2})$ لاپلاس بگیر

$\boxed{\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{s}}$

① $\boxed{e^{-\frac{\pi}{2}s}}$

② t را با $\frac{\pi}{2}$ جمع و از $\sin(t+\frac{\pi}{2})$ لاپلاس بگیر

$\mathcal{L}(\cos(t)) \rightarrow \boxed{\frac{s}{s^2+1}}$

① $\boxed{e^{-\pi s}}$

② t را با π جمع و از $\sin(t+\pi)$ لاپلاس می‌گیریم

$\mathcal{L}(-\sin t) \rightarrow \boxed{\frac{-1}{s^2+1}}$

«قضیه دوم: لاپلاس مشتق»

$$\mathcal{L}(y')=s\mathcal{L}(y)-y(0)$$

$$\mathcal{L}(y'')=s^2\mathcal{L}(y)-s\,y(0)-y'(0)$$

$$\mathcal{L}(y''')=s^3\mathcal{L}(y)-s^2y(0)-s\,y'(0)-y''(0)$$

Date : Subject :

مثال: معادلات زیر را به کمک لاپلاس حل کنید:

$$1)\begin{cases} y'' + 4y = 2t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

سوال امتحانی 92,19,22

حل:

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = 2\mathcal{L}(t)$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4\mathcal{L}(y) = 2 \times \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(y)(s^2+4) = \frac{2}{s} \rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} \rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{1/2}{s^2}}_{\frac{1}{2}\times t} + \underbrace{\frac{-1/2}{s^2+4}}_{-1/2 \times \frac{1}{2}\sin 2t}\right] \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]}$$

$$2)\begin{cases} y'' + 4y = \sin + u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

سوال امتحانی 92,3,12

حل:

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = \underbrace{\mathcal{L}(\sin t)}_{\frac{1}{s^2+1}} + \mathcal{L}\left[\underbrace{u_{2\pi}(t)}_{① \ \boxed{e^{-2\pi s}}} \underbrace{\sin(t-2\pi)}_{②}\right]$$

t را با 2π جمع و از sint لاپلاس بگیر

$$\boxed{\frac{1}{s^2+1}}$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\cancel{y(0)}^{\,0} - \cancel{y'(0)}^{\,0} + 4\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(y)(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \longrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} + e^{-2\pi s} \times \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\Big[\underbrace{\frac{-1/3}{s^2+4}}_{①} + \underbrace{\frac{+1/3}{s^2+1}}_{②}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\underbrace{e^{-2\pi s}}_{③}\underbrace{\Big(\frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1/3}{s^2+4}\Big)}_{④}\Big]$$

$\boxed{-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sin 2t}$ ① $\boxed{\frac{1}{3}\sin t}$ ② $\boxed{u_{2\pi}(t)}$ ③

لاپلاس معکوس می‌گیریم و t ها را با $(t-2\pi)$ عوض می‌کنیم

$$\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$$

لاپلاس معکوس

④ $\boxed{\frac{1}{3}\sin(t-2\pi) - \frac{1}{6}\sin 2(t-2\pi)}$

$$y = ① + ② + ③ + ④$$

«قضیه سوم: لاپلاس انتگرال»

توجه: برای شروع از راست به چپ می‌آییم.

1) $\mathcal{L}\Big(\underbrace{\int_0^t}_{②} \underbrace{f(t)}_{①} dt = \frac{1}{s}F(s)$

② $\frac{1}{s}$ ضرب کن

① لاپلاس از تابع

2) $\mathcal{L}^{-1}\Big(\underbrace{\frac{1}{s}}_{②} \underbrace{F(s)}_{①}\Big)$

② $\int_0^t$ را بگیرید

① لاپلاس معکوس

مثال) $\mathcal{L}\left(\int_0^t \underbrace{\sin t}_{①}\, dt\right)$

② $\frac{1}{s}$ ضرب کن

① لاپلاس $\rightarrow \frac{1}{s^2+1}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2+1}} \Leftarrow$$

2) $\mathcal{L}\left(\int_0^t \underbrace{(1+\cos t)}_{①}\, dt\right)$

② $\frac{1}{s}$ ضرب کن

① لاپلاس $\rightarrow \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}$

$$\boxed{\frac{1}{s} \times \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}\right)}$$

«قضیه چهارم: انتقال»

1) $\mathcal{L}(\underbrace{e^{bt}}_{②} \underbrace{f(t)}_{①}) = F(s-b)$

① لاپلاس از جدول

② sها را با $s-a$ عوض کن

2) $\mathcal{L}^{-1}(F\,\underbrace{(s-b)}) = e^{bt} f(t)$

s جدید بگیر ← لاپلاس معکوس گرفته و جواب را در e^{bt} ضرب کن

Date :

Subject :

مثال) از راست به چپ طبق نگاره پیش می‌رویم.

$$\mathcal{L}\left(e^{t}\int_0^t e^{-2r}\underbrace{(1-\sin 2r)}_{\text{لاپلاس ①}}\,dr\right)$$

① لاپلاس $\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2+4}$

② s ها را با $(s+2)$ عوض کن

$$\frac{1}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

③ $\frac{1}{s}$ ضرب کن

$$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2+4}\right)$$

④ s ها را با $(s-1)$ عوض کن

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(s-1)+2}-\frac{2}{(s-1-2)^2+4}\right)$$

نکته: در محاسبه لاپلاس معکوس کسری بصورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر مخرج کسر درجه دو و قابل تجزیه شدن بود از تفکیک کسرها استفاده می‌کنیم.

ب) اگر مخرج کسر درجه دو و قابل تجزیه نبود ($\Delta<0$) به مربع کامل تبدیل و از عکس قضیه انتقال استفاده می‌کنیم.

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\,\frac{1}{s^2-5s-1}\right) \quad +\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

② $u_\pi(t)$ بگذار و t ها را $t-\pi$ عوض کن

$$u_\pi(t)\times\frac{2}{\sqrt{29}}\sinh\frac{\sqrt{29}}{2}(t-\pi)\times e^{-5/2(t-\pi)}$$

① لاپلاس معکوس بگیر

$$\frac{1}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}$$

s جدید را می‌گیریم و ضرب در $e^{-5/2\,t}$ می‌کنیم

$$\frac{2}{\sqrt{29}}\sinh\frac{\sqrt{29}}{2}\times e^{-\frac{5}{2}t}$$

«قضیهٔ پنجم: مشتق لاپلاس»

$$\mathcal{L}(-t\,f(t))=F'(s)\ ;\ \mathcal{L}(t^2 f(t))=F''(s)\ ;\ \mathcal{L}((-t)^n f(t))=F^{(n)}(s)$$

① لاپلاس بگیر
② از ① یک بار مشتق بگیر

① لاپلاس بگیر
② از ① دو بار مشتق بگیر

① لاپلاس بگیر
② از ① n بار مشتق بگیر

لاپلاس معکوس :

از این قضیه برای محاسبه‌ی لاپلاس معکوس توابع لگاریتمی ، Arcsin ، Arccot ، Arctan و Arccos استفاده می‌شود:

$$\frac{\mathcal{L}^{-1}(F(s))}{-t} = f(t)$$

$\downarrow$ ① مشتق بگیر

$\downarrow$ ② لاپلاس معکوس بگیر

$\downarrow$ ③ تقسیم بر $-t$ کن

$\mathcal{L}^{-1}$[توابع لگاریتمی و Arctan ....

$\downarrow$ ① مشتق بگیر

- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
- $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$\downarrow$ ② لاپلاس معکوس بگیر

$\downarrow$ ③ تقسیم بر $-t$ کن

مثال

سوال امتحانی 88/11/7

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\ \underline{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{s}\right)}\right]$$

① مشتق بگیر ⟵ $\dfrac{-1/s}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2}=\dfrac{-1}{s^2+1}$

② لاپلاس معکوس بگیر ⟵ $-\sin t$

③ تقسیم بر $-t$ کن

$\dfrac{-\sin t}{-t}=\dfrac{\sin t}{t}=f(t)$

④ $\int_0^t$ ③ را بگیر

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$$

«قضیه شش: انتگرال لاپلاس»

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\,\underline{f(t)}\right)=\int_s^{\infty}F(u)\,du$$

① لاپلاس بگیر

② $\int_s^{\infty}$ ① را بگیر

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\underline{F(u)\,du}\right)$$

① انتگرال $\int_s^{\infty}$ بگیر

② لاپلاس معکوس بگیر

③ ضرب در t کن

سوال امتحانی 22/3/12

$$\mathcal{L}\left(t^2 e^t \int_0^t \frac{1}{u} \sin u \, du\right)$$

① لاپلاس بگیر $\to \dfrac{1}{s^2+1}$

② $\int_s^\infty$ را بگیر

$\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1} = \operatorname{Arctan}\Big|_s^\infty \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcta}(s)$

③ تقسیم بر s کن

$\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(s)\right)$

④ s ها را با $(s-1)$ عوض کن

$\frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(s-1)\right) = A$ می‌گذاریم

⑤ دوبار مشتق بگیر از A

A''

«قضیه هفتم: کاربرد لاپلاس»

1) $\mathcal{L}\left(\int_0^\infty e^{-at} f(t)\, dt\right) = F(a)$

① لاپلاس بگیر

② s را قرار بده

$s = a$

2) $\int_0^\infty f(t)\, dt = F(0)$

① لاپلاس بگیر

② s را قرار بده

$s = 0$

مثال: $\int_0^\infty e^{-2t} f(t)\,dt = F(2)$

$f(t)$ ← لاپلاس

$\int_0^\infty e^{-2t}$ ← s را برابر $s=2$ قرار بده

مثال: $\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t} \frac{1}{t}(1-\cos t)\,dt\right)$

① لاپلاس بگیر

② $\int_s^\infty$ را بگیر ①

③ s را با $(s-1)$ عوض کن

④ $\frac{1}{s}$ ضرب بکن

$\mathcal{L}\left(\int_0^\infty e^{t} \frac{1}{t}(1-\cos t)\,dt\right)$

① لاپلاس بگیر

② $\int_s^\infty$ را بگیر ①

③ s بگذار -1 $\quad s=-1$

مثال: $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} = \frac{\pi}{2}$

سوال امتحانی ۲۷ / ۱۰ / ۹۰

$\mathcal{L}\left(\int_0^\infty \frac{1}{t} \sin at\,dt\right)$

① لاپلاس $\frac{a}{s^2+a^2}$

② $\int_s^\infty$ را بگیر ①

③ s را بگذار $s=0$

$\int_s^\infty \frac{a}{u^2-a^2}\,du = \operatorname{Arctan}\frac{u}{a}\Big]_s^\infty \to \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{s}{a}$

$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{0}{a} = \frac{\pi}{2}$

مثال: $\mathcal{L}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}\,dt\right)$ سوال امتحانی ۱۴ ر ۲ ر ۸۸

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^\infty e^{-t}\ \frac{1}{t}\ (1-\cos t)\,dt\Big)$$

① لاپلاس: $\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$

② $\int_s^\infty$ را بگیر: $\int_s^\infty \left(\frac{1}{u}-\frac{u}{u^2+1}\right)du \to \ln u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big]_s^\infty$

$$=\ln\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\Big]_s^\infty$$

$$=\cancel{\ln 1}^{\,0}-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

③ s را بگذار $s=1$: $-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

«قضیه هشتم: کانولشن»

کانولشن دو تابع f و g را با $f*g$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$$

لاپلاس کانولشن دو تابع f و g عبارت اند از :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du\right) = (f \text{ لاپلاس})\times(g \text{ لاپلاس}) = F(s)\,G(s)$$

f لاپلاس $\times$ g لاپلاس

مثال: $y = 1 - \int_0^t (t-u)\,y(u)\,du$ سوال امتحانی ۸/۱۱/۹۱

$$\underbrace{\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)}_{\frac{1}{s}} - \mathcal{L}\left(\int_0^t (t-u)\,y(u)\,du\right)$$

$\mathcal{L}(t) \times \mathcal{L}(y)$ کانولشن

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} - \underbrace{\mathcal{L}(t)}_{\frac{1}{s^2}}\,\mathcal{L}(y) \to \mathcal{L}(y)\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(y)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{1}{s} \to \mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+1} \to y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos t$$

$$\boxed{y = \cos t}$$

» مثال ها و تمرینات مهم امتحانی حل شده

1) $F(s) = \dfrac{5s-1}{s(s^2+1)(s^2-1)}$

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s+1}$$

$$f(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + D\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + E\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$f(t) = A + B\cos t + C\sin t + De^{t} + Ee^{-t}$$

$$A(s^2+1)(s^2-1) + (Bs+C)s(s^2-1) + D(s+1)s(s^2+1) + E(s-1)(s)(s^2+1) = 5s-1$$

$$A = 1 \quad ; \quad B = \frac{-93}{16} \quad ; \quad C = \frac{45}{24} \quad ; \quad D = 1 \quad ; \quad E = \frac{3}{2}$$

2) $F(s) = \dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$

$$\frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \Rightarrow \frac{A}{s-1} + \frac{Bs}{s^2+1} + \frac{C}{s^2+1} \Rightarrow Ae^{t} + B\cos t + C\sin t$$

3) $y'' - 2y' - 3y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 7$

$\mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = 0$

$(s^2\mathcal{L}(y) - s\,\overset{1}{\cancel{y(0)}} - \overset{7}{\cancel{y'(0)}}) - 2(s\mathcal{L}(y) - \overset{1}{\cancel{y(0)}}) - 3\mathcal{L}(y) = 0$

$\mathcal{L}(y)(s^2 - 2s - 3) - s - 7 + 2 = 0 \longrightarrow \mathcal{L}(y) = \dfrac{s+5}{s^2 - 2s - 3}$

$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+5}{\underbrace{s^2 - 2s - 3}_{(s-3)(s+1)}}\right)$

$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s+1}\right) = Ae^{-3t} + Be^{-t}$

$A(s+1) + B(s-3) = s+5$

$s = -1 \longrightarrow -4B = 4 \longrightarrow \boxed{B = -1}$

$s = 3 \longrightarrow 4A = 8 \longrightarrow \boxed{A = 2}$

4) $y'' - y = e^{2x} + x \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$ سوال امتحانی ۸/۱۱/۹۱

$\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{2x}) + \mathcal{L}(x)$

$s^2\mathcal{L}(y) - s\,y(0) - s\,y(0) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s^2} \longrightarrow \mathcal{L}(y)(s^2 - 1) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s^2}$

Date :

Subject :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)} + \frac{1}{s^2(s^2-1)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Ds+E}{s^2} + \frac{F}{s-1} + \frac{G}{s+1}\right]$$

$$y = Ae^{2t} + Be^{t} + Ce^{-t} + D + Et + Fe^{t} + Ge^{-t}$$

5) $$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+4s+13}$$

$$s^2+4s+13 = (s+2)^2+9$$

$$F(s) = \frac{2s+1}{(s+2)^2+9} = \frac{2(s+2)-4}{(s+2)^2+9} + \frac{1}{(s+2)^2-9}$$

$$F(s) = \frac{\overbrace{2(s+2)}^{s\ \text{جدید}}}{\underbrace{(s+2)}_{s\ \text{جدید}}{}^2+9} + \frac{-3}{\underbrace{(s+2)}_{s\ \text{جدید}}{}^2+9} \Rightarrow f(t) = e^{-2t}\left[2\cos 3t - \sin 3t\right]$$

6) $\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{3t}(\sin t+\cos t)\,dt\right)$

① لاپلاس

$\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}$

② s ها را با s-3 عوض کن

$\to \frac{1}{(s-3)^2+1}+\frac{s-3}{(s-3)^2+1}$

③ $\frac{1}{s}$ ضرب کن

$\frac{1}{s}\left[\frac{1}{(s-3)^2+1}+\frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right] \to \frac{1}{s}\left[\frac{s-2}{(s-3)^2+1}\right]$

7) $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\ln\sqrt[3]{\frac{s+a}{s+b}}\right)$ سوال امتحانی ۱۲ر۳ر۹۲

$\to \frac{1}{3}\left(\ln(s+a)-\ln(s+b)\right)$

① مشتق $\to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)$

② لاپلاس معکوس $\to \frac{1}{3}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$

③ تقسیم بر t- میکنیم $\to \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{-t}\right)$

④ $u_\pi(t)$ بگذار و t ها را با $t-\pi$ عوض کن

$u_\pi(t)\times\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-a(t-\pi)}-e^{-b(t-\pi)}}{-(t-\pi)}\right)$

Date Subject :

8) $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln \dfrac{s^2+1}{s(s+1)}\right)$ سوال امتحانی 91/6/12

تفکیک می‌کنیم : $\ln(s^2+1)-\ln s-\ln(s+1)$

$\downarrow$ ①

مشتق $\longrightarrow \dfrac{2s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1}$

$\downarrow$ ②

لاپلاس معکوس $\longrightarrow 2\times\cos t-1-e^{-t}$

$\downarrow$ ③

تقسیم بر $-t$ $\longrightarrow \dfrac{2\cos t-1-e^{-t}}{-t}$

9) $y''+2y'+5y=u_3(t)+3 \quad ; y(0)=y'(0)=0$

$$\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+5\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(u_3(t))+\mathcal{L}(3)$$

$$s^2\mathcal{L}(y)-s\cancel{y(0)}^{0}-\cancel{y'(0)}^{0}+2(s\mathcal{L}(y)-\cancel{y(0)}^{0})+5\mathcal{L}(y)=\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{3}{s}$$

$$\mathcal{L}(y)(s^2+2s+5)=\frac{e^{-3s}}{s}+\frac{3}{s}$$

$$\mathcal{L}(y)=\frac{e^{-3s}}{s(s^2+2s+5)}+\frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-3s}\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{(s+1)^2+4}\right] + 3\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{1}{(s+1)^2+4}\right]$$

x→s

① $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

انتگرال بگیر ② $\int_0^t \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\,dt$

① $\mathcal{L}^{-1}$ [illegible] s

$e^{-t}\frac{1}{2}\sin 2t$

انتگرال بگیر ② $\frac{1}{2}\int_0^t e^{-t}\sin 2t\,dt$

③ $u_3(t)$ بگذار و t ها را با $(t-3)$ عوض کن

10) $f(x) = e^{-2x}\int_0^x (t-\cosh(3t))\,dt$ سوال امتحانی ۹۳

① لاپلاس → $\frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2-9}$

② در $\frac{1}{s}$ ضرب کن

→ $\frac{1}{s}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2-9}\right]$

③ جای s را با $(s+2)$ عوض کن.

→ $\frac{1}{s+2}\left[\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{s+2}{(s+2)^2-9}\right]$

11) $y''+y=f(x)$; $y(0)=y'(0)=1$; $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<\pi\\ 0 & \pi\leqslant x<2\pi\end{cases}$

سوال امتحانی 93/6/15

$f(x)=1[u_0(t)-u_\pi(t)]$

$\mathcal{L}(f(x))=\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$

$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(f(x))$

$s^2\mathcal{L}(y)-s\overset{1}{\cancel{y(0)}}-\overset{1}{\cancel{y'(0)}}+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(f(x))$

$\mathcal{L}(y)(s^2+s+1)=s+\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi s}}{s}$

$\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s(s^2+1)}-\frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)s} \rightarrow e^{-\pi s}\frac{1}{(s^2+1)s}$

② $u_\pi(t)$ بگذار رو
جای t ها را با
عوض کن $(t-\pi)$

لاپلاس و $\int_0^t$ بگیر
$\int_0^t \sin t\,dt$

$y=\sin t+\cos t+\int_0^t \sin t\,dt+(t-\pi-\cos(0))u_\pi(t)$

$y=\sin t+\cos t-(\cos t-1)+u_\pi(t)(-\cos t-1)$

12) $\mathcal{L}\left(\int_0^t \underbrace{e^{-2u}}_{②} \underbrace{\cos 3u}_{①}\, du\right)$

① لاپلاس $\to \dfrac{s}{s^2+9}$

② s را با s+2 عوض کن $\to \dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$

③ 1/s را ضرب کن $\to \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}\right]$

13) $y'' + 4y = 2t \quad ; \; y(0) = y'(0) = 0$ سوال امتحانی 92/10/22

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(2t)$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - 0 - 0 + 4\mathcal{L}(y) = 2\frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+4)\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2} \times \frac{1}{s^2+4} \to y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2}\right)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$y = 2t \times \frac{1}{2}\sin 2t$$

سوال امتحانی 12/6/91

14) $\begin{cases} y'' - y' = e^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

$$s^2 \mathcal{L}(y) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - s\mathcal{L}(y) - y(0) = \mathcal{L}(e^{2x})$$

$$(s^2 - s)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-2} \qquad e^{2t}\, e^{t}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-2} \times \frac{1}{s^2 - s} = \frac{1}{s-2} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s-1}$$

15)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{}\ \ln\left(\frac{s-2}{s+1}\right)\right)$$

s جدید بگیر و ضرب در e^{2t} کن و

t را بگیر

$\ln(s-2) - \ln(s+1)$

$\downarrow$ ①

مشتق $\rightarrow \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$

$\downarrow$ ②

لاپلاس معکوس $\rightarrow e^{-2t} - e^{-t}$

$\downarrow$ ③

تقسیم بر $-t$ کن

$$\frac{e^{-2t} - e^{-t}}{-t}$$

16) $y' - e^{t}\int_0^t e^{-u} y''(u)\,du = y + u_1(t) \quad ; \; y(0) = y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}(y') - \mathcal{L}\int_0^t e^{t-u}\, y''(u)\,du = \mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(u_1(t))$$ کانولوشن

$$\downarrow e^{t} \quad \downarrow y''$$

$$\mathcal{L}(e^{t}) \times \mathcal{L}(y'')$$

$$\rightarrow s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)} - \frac{1}{s-1}\left(s^2\mathcal{L}(y) - \cancel{s y(0)} - \cancel{y'(0)}\right) = \mathcal{L}(y) + \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\mathcal{L}(y)\left(s - \frac{s^2}{s-1} - 1\right) = \frac{e^{-s}}{s} \rightarrow \mathcal{L}(y)\left(\frac{s^2 - s - s^2 - s + 1}{s-1}\right) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-s}}{s} \times \frac{s-1}{-2s+1} \rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}\,\frac{s-1}{s(-2s+1)}\right]$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s} \times \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{-2s+1}\right)\right]$$

② $u_1(t)$ بگذار و t ها را با $(t-1)$ عوض کن

$$\downarrow$$

$$u_1(t)\left(A - \tfrac{1}{2} B e^{\frac{1}{2}(t-1)}\right)$$

①

$$\downarrow$$

$$A - \tfrac{1}{2} B e^{\frac{1}{2}t}$$

17) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$; $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$

سوال امتحانی ۹۳/۱۰/۳
ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{t}}_{②}\ \underbrace{e^{-at} - e^{-bt}}_{①}\,dt = \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$$

① لاپلاس بگیر

$$\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

② $\int_s^\infty$ را بگیر ①

$$\int_s^\infty \left(\frac{1}{s+a}\right) - \left(\frac{1}{s+b}\right) ds = \operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}\Big|_s^\infty$$

③ s ها را صفر بگذار

$$\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b} - \operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b} = 0 - \operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}$$

$s \to \infty \to \operatorname{Ln}1 = 0$

$$-\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b} = -\operatorname{Ln}\frac{0+a}{0+b} \Longrightarrow -\operatorname{Ln}\frac{a}{b} = \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$$

18) $\int_0^{\infty}\int_0^{x} t\, e^{2x-t} \sin 3t \, dt\, dx$

$$\int_0^{\infty} e^{2x} \int_0^{x} t\, e^{-t} \sin 3t \; dx$$

① لاپلاس بگیر

$$\frac{3}{s^2+9}$$

② جای s بگذار s+1

$$\frac{3}{(s+1)^2+9}$$

③ یکبار منفی مشتق بگیر

$$-\left[\frac{-2(s+1)(3)}{\left((s+1)^2+9\right)^2}\right]$$

④ $\frac{1}{s}$ ضرب کن

$$\frac{1}{s}\left[\frac{6(s+1)}{\left[(s+1)^2+9\right]^2}\right]$$

⑤ s=-2 قرار بده

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{6(s+1)}{\left[(s+1)^2+9\right]^2}\right] \xrightarrow{s=-2} \; : \; \frac{3}{100}$$

19) $y = \sin 2x + \int_0^x y(x) \sin 2(x-t)\, dt$

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin 2x) + \mathcal{L}\left[\cancel{\int_0^x} y(x) \sin \cancel{2}(x - \cancel{t})\, \cancel{dt}\right]$$

لانك

$$\mathcal{L}(y) \times \mathcal{L}(\sin 2x)$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2+4} + \mathcal{L}(y)\,\frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(y) : \mathcal{L}(y)\left(1 - \frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(y)\left(\frac{s^2+4-2}{\cancel{s^2+4}}\right) = \frac{2}{\cancel{s^2+4}}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s^2+2} \rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2}\right)$$

$$y = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}\, t$$

20) $y'' + y' = \cos t + \int_0^t y'(x) \sin(t-x)\, dx$ کانولوشن

سوال امتحانی بهمن 93

$y(0) = y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}(y') \times \mathcal{L}(\sin t)$$

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(\cos t) + \mathcal{L}(y')\mathcal{L}(\sin t)$$

$$\left[s^2 \mathcal{L}(y) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} \right] + \left[s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)} \right] = \frac{s}{s^2+1} + \left[s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)} \frac{1}{s^2+1} \right]$$

$$\mathcal{L}(y)\left(s^2 + s - \frac{s}{s^2+1} \right) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(y)\left(\frac{\cancel{s}(s+1)(s^2+1) - s}{\cancel{s^2+1}} \right) = \frac{\cancel{s}^{\,1}}{\cancel{s^2+1}}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^3 + s + s^2 + 1 - 1} = \frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\underbrace{\frac{1}{s}}_{③} \times \frac{1}{\underbrace{(s+(1/2))^2 + 1 - \frac{1}{4}}_{① \ \frac{3}{4}}} \right)$$

③ $\int_0^t$ ① را بگیر

② جدید ما گرفتیم و در $e^{-1/2 t}$ ضرب می‌کنیم

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3/4} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-1/2 t} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t e^{-1/2 t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Date : Subject :

21) $$\int_0^\infty \int_0^x e^{t-2x} \frac{\sin t}{t}\, dt\, dx$$ سوال امتحان 94/10/30 ج دوم

$$\int_0^\infty e^{-2x} \int_0^x e^{t} \frac{1}{t} \sin t \, dt\, dx$$

① لاپلاس

$$\frac{1}{s^2+1}$$

② انتگرال $\int_s^\infty$ ① را بگیر

$$\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\, ds = \operatorname{Arctan} s \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} s$$

③ عوض کردن s با s-1

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(s-1)$$

④ $\frac{1}{s}$ ضرب کن

$$\frac{1}{s} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{s} \operatorname{Arctan}(s-1)$$

⑤ $\boxed{s=2}$ بگذار

$$\overbrace{\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2-1)}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$$

Date

Subject :

22) $y'(x) = \cos x + \int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt \qquad y(0)=1$ کانولوشن

$\mathcal{L}(y'(x)) = \mathcal{L}\cos x + \mathcal{L}(y)\,\mathcal{L}(\cos x)$

$s\mathcal{L}(y) - \overset{1}{y(0)} = \frac{s}{s^2+1} + \mathcal{L}(y)\frac{s}{s^2+1}$

$\left(s - \frac{s}{(s^2+1)}\right)\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+1} + 1 \rightarrow \mathcal{L}(y) = \dfrac{\frac{s}{s^2+1}+1}{s-\frac{s}{s^2+1}}$

$\mathcal{L}(y) = \dfrac{\frac{s+s^2+1}{\cancel{s^2+1}}}{\frac{s^3+s-s}{\cancel{s^2+1}}} = \frac{s^2+s+1}{s^3} \rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right)$

23) $F(s) = \frac{(s+2)}{s^2-2s+5}e^{-\pi s}$ سوال امتحان ۳۰ ردا/۹۴ جلسه دوم

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2-2s+5}e^{-\pi s}\right] = u_\pi(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+5-2s}\right] = u_\pi(t)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1+3}{(s-1)^2+4}\right)$

$= u_\pi(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{3}{(s-1)^2+4}\right) = u_\pi e^t\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+4}\right)$

Date : Subject :

$u_\pi(t)\left[e^{t}\left(\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)\right] \xrightarrow{t \to t-\pi}$ جاگذاری

$u_\pi(t)\, e^{t-\pi}\left(\cos 2(t-\pi) + \frac{3}{2}\sin 2(t-\pi)\right)$

سوال امتحان د 30/10/94 جلسه دوم

24)

$$y'(x) + \int_0^x \cos(x-u)\,y(u)\,du = \cos x \quad ; \; y(0)=1$$

$$y'(x) + \cos x * y(x) = \cos x$$

$$\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}[\cos x * y] = \mathcal{L}(\cos x)$$

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\to s\mathcal{L}(y) + \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}(y) = \frac{s}{s^2+1} + 1$$

$$\mathcal{L}(y)\left(s + \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s+s^2+1}{s^2+1} \to \mathcal{L}(y) = \frac{s+s^2+1}{s^3+2s}$$

Date : Subject :

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+s+1}{s^3+2s}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+2} + \frac{C}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As}{s^2+2} + \frac{B}{s^2+2} + \frac{C}{s}\right]$$

$$= A\cos\sqrt{2}\,t + \frac{B}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,t + C$$