جلسه‌ای چهارم ۱، ۴، ۹۶ : نمونه سؤال

۸۵ و ۸۸ امتحانات خود دکتر پورنکی

۱/ $y' + \frac{1}{x\ln(x)} y = 3x^2$ $(x>0 \,,\, x\neq 1)$ $y' + p(x)y = q(x)$

۲/ $y' - y + xe^{-2x} y^3 = 0$ برنولی $y_c = e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$

۳/ $y' = \frac{y}{2}\left((y^2e^x - 1)\tan(x) - y^2e^x\right)$ برنولی $y = y_c\left(\underbrace{\int \frac{q(x)}{y_c}}_{\text{جواب خصوصی}} + c_1\right)$

۱/ $y_c = e^{-\int \frac{1}{x\ln(x)}dx} = e^{-\ln(\ln(x))} = \frac{1}{\ln(x)}$

۲/ تقسیم بر y^3

۳/ $y' - \left(\frac{\tan(x)}{2}\right)y = y^3\left[\frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2}\right]$

جواب ؟

$(1+t^2)y' + ty = \sqrt{(1+t^2)^5}$

آیا جوابی هست در شرط مرزی صدق کند ؟ $y(0)=0$

$y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c_1\right)$

ثابت

« بجای t صفر می‌گذاریم و شرط مرزی هم حل می‌شود »

تمام توابع مشتق پذیر

$y: \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \to [-1,1]$

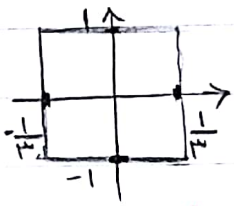
$y(x) + \int_0^x \frac{y(t)+9}{y(t)+2t+3}\,dt = 0$

مخرج نباید صفر شود . پیوستگی باید بررسی شود

شرط مشتق پذیر بودن، پیوسته بودن است.

$y+2t+3=0$

$y=-2t-3$



$A = \int_{g(x)}^{f(x)} h(t)\,dt$

$\frac{dA}{dx} = f'(x)\,h(f(x)) - g'(x)\,h(g(x))$

$\frac{dy(x)}{dx} + \frac{y(x)+9}{y(x)+2x+3} = 0$

y'

$(y+9)\,dx + (y+2x+3)\,dy = 0$

$\Rightarrow (y+9)^2(3x+y)=0 \qquad y=-9 \quad \boxed{y=-3x} \in [-1,1]$

قابل قبول نیست چون در بازه‌ی سؤال نیست.

$ay'' + by' + cy = 0$ $\qquad a,b,c \geq 0$ و مثبت؟ $\quad a,b,c \in \mathbb{R}$

اگر $y=y(x)$ یک جواب باشد نشان دهید

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

ما باید برسیم به یک معادله‌ی دیفرانسیل و آن را حل کنیم.

$y = e^{\alpha x}$ معادله‌ی مفسر : $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \to \alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

برای ریشه‌ی مضاعف این صفر می‌شود

سه حالت دارد :

۱- ریشه‌ها حقیقی اند.

۲- ریشه‌ی مضاعف

۳- مختلط $\to e^{-\frac{b}{2a}x} \times e^{(iz)}$

$(\cos z + i \sin z)$

تأثیری در جدکردن ندارد.

$e^{-\frac{b}{2a}x}$ $\quad xe^{-\frac{b}{2a}x}$

می‌دانیم : $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

$y'' - 3y' + 2y = \boxed{f(x)} \to$ مثلثاتی ها

نمایی ها

چند جمله‌ای ها

تغییر پارامتر :

روش حدسی (ضرایب نامعین)

فرمت $f(x)$: $f(x) = e^{ax}\left[p_1(x)\sin(bx) + p_2(x)\cos(bx)\right]$

چند جمله‌ای   چند جمله‌ای

$y_p = ?$
جواب خصوصی

معادله‌ای شبیه معادله‌ی اصلی می‌نویسیم با یک x^λ و با درجه‌ی چند جمله‌ای بزرگتر

$x^\lambda \times e^{ax} \times \left[q_1(x)\sin(bx) + q_2(x)\cos(bx)\right]$

$\lambda = ? \to a + ib$ if $a = 0, b = 0 \Rightarrow$ تکرار ریشه‌های λ می‌شود تکرار ریشه صفر

تعداد تکرار ریشه‌ها

DATE / / SUBJECT:

مثلاً : $y^{(5)} - 2y^{(3)} = x^2$

ابتدا معادله‌ی همگن : $y^{(5)} - 2y^{(3)} = 0 \to \alpha^5 - 2\alpha^3 = 0 \to \alpha^3(\alpha^2 - 2) = 0 \to \lambda = 3$

$$\Rightarrow y_p = x^3 \times (ax^2 + bx + c)$$

تمرین ص ۱۶۴ :

$11/ \quad y'' + y' - 6y = \sin(t) + te^{2t}$

جواب ۲ جز $y = y_c + y_p$

$y = e^{\alpha x} \to \alpha^2 + \alpha - 6 = 0$ معادله‌ی مفسر

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow +2 \\ \searrow -3 \end{matrix} \qquad y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$y_{p_1} = \overset{\text{عدد}}{A} \sin(t) + \overset{\text{عدد}}{B} \cos(t)$ چه sin بود چه cos شما باید فرمت کلی را بگیرید :

$y'_{p_1} = A\cos(t) - B\sin(t)$ جواب اگر چند کششی بود جدا کنید و حل کنید .

$y''_{p_1} = -A\sin(t) - B\cos(t)$ $\qquad \underbrace{\square}_{0} \sin(t) + \underbrace{\bigcirc}_{0} \cos(t) = 0$

$t^1 . (at + b) e^{2t}$ چون t ضرب شده باید چند جمله‌ای درجه یک بگیریم :

$\overset{\downarrow}{\lambda = 1}$ ۲ یکبار در ریشه های معادله‌ی همگن تکرار شده بود .

مقدار $a = 2$ است $\rightarrow e^{2t}$

سؤال

امتحان : $y^{(4)} + 2y'' + y = 4\cos(x) - 2\sin(x)$

$\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = 0$ $\begin{matrix} \nearrow i & \text{دوبار} \\ \searrow -i & \text{دوبار} \end{matrix}$

$$y_c = (c_1 e^{ix} + c_2 x e^{ix} + c_3 e^{-ix} + c_4 x e^{-ix})$$

$$y_p = x^2(A\sin(x) + B\cos(x))$$

« باید مقدار $a+ib$ را حساب کنیم، که a صفر است و b یک پس چون تکرار i دو است در x^2 ضرب می‌کنیم »

$$y'' + a^2 y = \sin(bx) \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad a, b \neq 0$$

$$\alpha^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm ai$$

$$y_c = c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax)$$

$$a + ib \to e^{\alpha x} \sin(bx)$$
$$e^{\alpha x} \cos(bx)$$

$$y_p = A\sin(bx) + B\cos(bx) \qquad a \neq \pm b$$

$$\text{if } \left.\begin{matrix} a = b \\ a = -b \end{matrix}\right\} \to y_p = x\left[A\sin(bx) + B\cos(bx)\right]$$

$at+b$

$$y'' - 2y' + 2y = (2t - 2) - 2e^t(\cos t + \sin t)$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0 \to \alpha_{1,2} = 1 \pm i \to y_c = e^{-x}(c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x))$$

$$y_p = t \times e^t \times [A\sin(t) + B\cos(t)]$$

λ تکرار $a+ib$ است.
$1 \quad +i$

۱۶/ $y''+y=\cos t\,\boxed{\cos 2t\,\cos 3t}\rightarrow \frac{1}{2}(\cos 5t+\cos t)$ ص ۱۶۴

$\cos(a)\,\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$

$\sin(a)\,\sin(b)=\frac{1}{2}(-\cos(a+b)+\cos(a-b))$

$\sin(a)\,\sin(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

$y''-2y'+5y=2\cos^2(t)\,e^t$

$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$\rightarrow 2\cos^2\alpha=\cos(2\alpha)+1$

$y''-2y'+5y=\cos 2t\,e^t+e^t \rightsquigarrow x^{\lambda_1}e^t$

$\downarrow$

$x^{\lambda_2}e^t(A\sin(2t)+B\cos(2t))$

چک کنید برای λ_2 هم $\boxed{1+2i}$

$x^3y'''+5x^2y''-7xy'+y=0$ کاندید برای جواب عمومی x^α است

$y=x^\alpha$

$y'=\alpha x^{\alpha-1}$

$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$

اویلر $x^2y''+ay'x+by=f(x)$

$y=x^\alpha$

$\underbrace{\alpha(\alpha-1)x^\alpha}_{y''}+a\alpha x^\alpha+bx^\alpha=0$

$\alpha(\alpha-1)+a\alpha+b=0$

$\alpha^2+(a-1)\alpha+b=0 \rightarrow x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2}$

$$\overset{a=1}{x^2y''} + xy' - y = -2x^2 e^x \quad (x>0) \qquad W(x, x^{-1}) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-1}$$

$$\alpha^2 + \overset{a-1}{0}\,\alpha - 1 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \qquad y_c = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

تغییر پارامتر : $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

حالت کلی : $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad y_p = u y_1 + v y_2$

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}$$

$$y^2 + (1+ty)y' = 0$$

الف / عامل انتگرال ساز $\mu(t,y) = f(\underbrace{ty}_{u})$

معادله را در $f(u)$ ضرب می‌کنیم :

ب / آیا جوابی وجود دارد که $y(0)=1$

$$(f(u)\,y^2) + (f(u)(1+u))\,y' = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\underbrace{(f(u)\,y^2)}_{M(t,y)}\,dt + \underbrace{(f(u)(1+u))}_{N(t,y)}\,dy = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \qquad \boxed{u = ty} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = t \end{cases}$$

$$(2yf + t f_u y^2) - (y f_u (1+u) + f \times y) = 0 \qquad f_u = \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

$f = ?$

DATE / / SUBJECT:

$$(ty^2 - y(1+u))f_u + (y)f = 0$$

$$(u-(1+u))f_u + f = 0 \Rightarrow f = f_u \rightarrow f = e^u$$

$$y' = \frac{y}{x^2+y^2+x}$$

عامل انتگرال ساز : $\rho(x,y) = f(\underbrace{x^2+y^2}_{u})$

$$\frac{1}{x^2+y^2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \checkmark$

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left[(y)dx - (x^2+y^2+x)dy = 0\right]$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \checkmark$

$\phi(x,y) \longrightarrow$ جواب مسئله

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \phi = -\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) + g(y) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 1 - \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

مشتق

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + g'(y) = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$y' = e^{2y}$$
$$y(0) = 0$$

الف/ در بازه‌ای مانند $(-2,2)$ جواب وجود دارد و یگانه است.

ب/ $(-r_{max}, r_{max})$ که این بازه ی max از قضیه ی پیکارد به دست آمده باشد،

ج/ کلی ترین بازه‌ای که جواب واحد است.

Sahand

Scanned by CamScanner

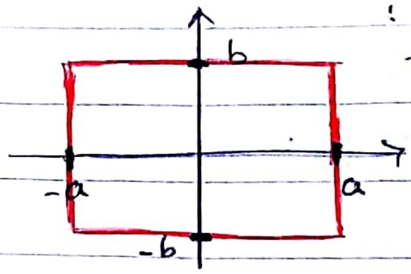
a و b آزادند.

تضمین پیکارد $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = c \end{cases}$ → پیوسته نسبت به y

$\frac{df}{dy}$ پیوسته نسبت به y هم

$$\begin{cases} f = e^{2y} \\ \frac{df}{dy} = 2e^{2y} \end{cases}$$

فرض کنید:



$$r_{max} = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \to M = \max f$$

$|t| \leq a$

$|y| \leq b$

$$M = e^{2b} \qquad \frac{b}{M} = \frac{b}{e^{2b}}$$

$$g(b) = \frac{b}{e^{2b}} \to g'(b) = e^{-2b}(-2b+1) = 0 \to \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{e^{1}} = \boxed{\frac{1}{2e}}$$

برای قسمت سوم باید معادله را حل کنیم:

$$\frac{y'}{e^{2y}} = 1 \qquad \frac{e^{-2y}}{-2} = x + c$$

در کل R پیوسته است

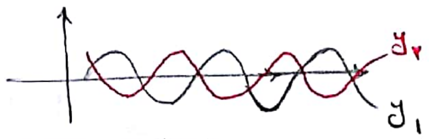
پس بازه‌ی max درواقع طولانی‌ترین بازه می‌شود خود R

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0$$

p و q در R پیوسته اند.

الف/ فرض کنید y_1 یک جواب غیر صفر. نشان دهید اگر $t_0 \in R$ موجود باشد که $y_1(t_0) = 0$ آنگاه یک همسایگی از t_0 مثل I وجود دارد که $y_1(t)$ در I ناصفر

DATE / / SUBJECT:



همین فرمتی

ب/ فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب مستقل معادله‌ی همگن. ثابت کنید بین هر دو ریشه‌ی متوالی y_1 دقیقاً یک ریشه از y_2 وجود دارد.

می خواهیم ثابت کنیم y' صفر نمی‌شود در آن بازه:

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(t_0)=0 \\ y_1(t_0)=0 \end{array}\right\} \longrightarrow y(t)=0$$

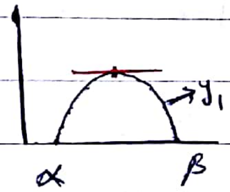
اگر y' صفر شود در نتیجه یک جواب می‌شود $y=0$ و چون p و q پیوسته‌اند پس مسئله جواب واحد دارد و اگر صفر جواب باشد چون مسئله گفته جواب غیر صفر نمی‌شود پس مشتق غیر صفر است.

$y'(t_0)>0 \longrightarrow$ صعودی الید

$y'(t_0)<0$

ریاضی ۱

قضیه‌ی رل: در بازه‌ی $[a,b]$ اگر تابع f پیوسته، (a,b) مشتق‌پذیر و $f(a)=f(b)=0$



$f=\frac{y_1}{y_2}$

$f'=\frac{y_1'y_2-y_2'y_1}{(y_2)^2}$

قضیه‌ی مقدار میانگین: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

α و β ریشه‌های متوالی y_1

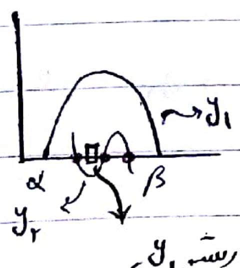
$W(y_1,y_2)\neq 0$

$c\in[a,b]$

$f(\alpha)=f(\beta)=0 \xrightarrow{\text{چون مستقل خطی‌اند}} f'(c)=0$ ✗

طبق رل $f'(c)$ می‌شود صفر اما گفتیم رونسکین مخالف صفر و تناقض دارد.

حالت اول: فرض کنید y_2 ریشه‌ای ندارد در بازه‌ی (α,β) $\longrightarrow [\alpha,\beta]$



"اگر فرض کنیم y_2 بیش از یک ریشه دارد طبق همون مثل می‌بینیم نمی‌شود"

DATE / / SUBJECT:

$$y''(c) = \overbrace{-q(c)}^{\text{مثبت}}\, y(c)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$\exists\, c \in [a,b] \longrightarrow y'(c) = 0$$

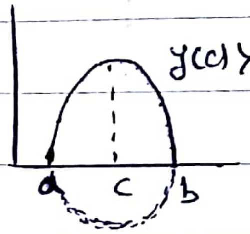
$$y(a) = y(b) = 0$$

$$[a,b]: \quad q(x) < 0$$

حکم: $y = 0 \longrightarrow$ تنها جواب

فرض کنید شکل آن مطابق زیر باشد:

باید شرایط رول را بنویسید.



$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

p و q پیوسته و y_1 و y_2 جواب های مستقل معادله

ثابت کنید: ۱/ $y_1, y_2 \longrightarrow t = t_0 \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$

$$W[y_1,y_2] = \underbrace{W[y_1,y_2](t_0)}_{\text{عدد ثابت}}\, e^{-\int p(t)\,dt} \neq 0$$

« باید مخالف صفر شود تا مستقل شوند »

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

y_1, y_2 نمی توانند همزمان صفر شوند.

۲/ y_1 و y_2 در نقطه ای مانند t_0 نمی توانند همزمان max و min شوند

۳/ اگر y_1' و y_2' در t_0 همزمان صفر شوند آنگاه: $p(t_0) = q(t_0) = 0$

$$p(t_0)y_1'(t_0) + q(t_0)y_1(t_0) = 0$$

$$p(t_0)y_2'(t_0) + q(t_0)y_2(t_0) = 0$$

صفر

DATE / / SUBJECT:

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \longrightarrow p(t_0) = q(t_0) = 0$$

۴/ if $W[y_1, y_2](t^*) = 0$, $y_1(t^*) = 0$ $\Big\}$ اثبات کنید $\Rightarrow$

حالت اول ① $y_2(t) = \underbrace{\left(\dfrac{y_2'(t^*)}{y_1'(t^*)}\right)}_{\text{عدد}} y_1(t)$

یا

حالت دوم ② $y_1(t) = 0$

$$W[y_1, y_2] = 0 \longrightarrow y_1' y_2 - y_2' y_1 = 0 \Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(y_2) = \ln(y_1) + \ln(\underset{\text{ثابت}}{c})$$

$$\boxed{y_2 = c y_1}$$

$$\lim_{t \to t^*} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \lim_{t \to t^*} \frac{y_2'(t)}{y_1'(t)} = \frac{y_2'(t^*)}{y_1(t^*)}$$