DATE / / SUBJECT:

کانال تلگرام دروس سرویس : Math. Service. Courses ۹۶/۸/۱۰

سال ۹۰ /

$$y\cos(x)dx + (y+2)\sin(x)dy = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ورود} \quad \frac{\Delta}{-M} \rightarrow f(y)$$

مثال :

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y = e^{\alpha x}$$

معادله مشخصه

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x} + e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow e^{\alpha x}(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -1, \ \alpha_2 = -1$$

جواب عمومی $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب کلی $y = y_c + y_p$

جواب عمومی (y_c) جواب خصوصی (y_p)

جواب خصوصی زمانی است که سمت راست معادله صفر نباشد (عدد و یا تابعی از x باشد)

$$\boxed{\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' \end{aligned}}$$

« هر ترکیب خطی از این ها معادله بالا را می سازد »

اضافی $y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$

مفهوم استقلال خطی :

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = 0$$

مستقل خطی اند اگر $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

خطی بودن به سبب اینکه توان آن ها همه یک است و استقلال یعنی وابسته نباشند و ضرایب برحسب یکدیگر نباشند .

DATE / / SUBJECT:

اگر بخواهیم دستگاه جواب داشته باشد باید دتر مینان ناصفر باشد.

۱۳ * $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$

رانسکین

مستقل خطی اند

برای معادله ی مرتبه ی دوم دو معادله ی مستقل می خواهیم و برای مرتبه ی n به n تا

مثال ابتدای جلسه:

$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$ e^{-x}

xe^{-x}

در مثال های جای دو جواب تنها یک جواب ا- را به دست آوردیم.

اگر دو ریشه متمایز نباشند کاندید بعدی برای جواب $xe^{\alpha x}$ است.

خطی

بررسی درستی جواب با جایگذاری امکان پذیر است که صدق می کند یا نه و بررسی استقلال

اگر در معادله ای y_1 یک جواب باشد و y_2 هم یک جواب دیگر بنابراین $ay_1 + by_2$ هم جواب است ⟸ اصل برهم نهی

تشابه معادلات چندجمله ای و معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ی n

درجه n

$y^2 + py + q = 0$

راه اول برای حل : فرض کنیم : $y = y_1 + y_2$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

جایگذاری در معادله:

$$(y_1+y_2)^2+p(y_1+y_2)+q=0$$

$$y_1^2+\underbrace{(2y_2+p)}_{0}y_1+y_2^2+py_2+q=0$$

$y_2=\frac{-p}{2}$ برای ساده شدن حل معادله

حال: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

اگر کل معادله را بر y تقسیم کنیم

$$\frac{y''}{y}+p(x)\frac{y'}{y}+q(x)=0$$

مشتق

$D^n=\frac{y^{(n)}}{y}$ جایگذاری یعنی $\longrightarrow D^{(2)}+p(x)D^{(1)}+q(x)=0$

جایگذاری مورد نظر اینجا ضرب است:

$$y=y_1(x)y_2(x)=y_1y_2 \Rightarrow y'=y_1'y_2+y_1y_2'$$

$$\rightarrow y''=y_1''y_2+y_1y_2''+2y_1'y_2'$$

جایگذاری در معادله ی اصلی:

$$(y_2)y_1''+\underbrace{(2y_2'+p(x)y_2)}_{0}y_1'+\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)\right)y_1=0$$

$$y_2=e^{-\int\frac{p(x)}{2}}$$

"اگر بخواهیم مرتبه را کاهش دهیم به صورت ضربی می نویسیم" y_1y_2

"وقتی که توان است تغییر متغیر جمع استفاده می کنیم" y_1+y_2

Sahand

DATE / / SUBJECT:

اگر در رابطه‌ای که برابر صفر قرار دادیم را بر y_2 تقسیم کنیم، تشابه را خواهیم دید.

$$2\frac{y_2'}{y_2} + p(x) = 0 \Rightarrow 2D^{(1)}_{y_2} + p(x) = 0$$

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2 \qquad \text{معادله‌ی ریکاتی}$$

$$y' + p(x)y = 0 \rightarrow y = e^{\int z(x)dx} \Rightarrow y' = z(x)e^{\int z(x)dx} = z(x)y$$

$$(z^2(x) + z'(x))y + p(x)y' = 0 \qquad y'' = (z^2(x) + z'(x))y$$

معادله را با تغییر متغیر به فضای جدیدی بردیم که شبیه معادله‌ی ریکاتی است.

« معادله‌ی ریکاتی در حالت کلی قابل حل نیست »

فرض کنیم y_1 را به عنوان جواب داریم و دنبال y_2 می‌گردیم:

جواب دوم $\leftarrow y_2 = y_1 + z = y_1 + \frac{1}{u} \longrightarrow y_2' = y_1' - \frac{u_1'}{u_1^2}$

$$\left(y_1' - \frac{u_1'}{u_1^2}\right) + p(x)\left(y_1 + \frac{1}{u_1}\right) = q(x) + r(x)\left(y_1 + \frac{1}{u_1}\right)^2$$

$$y_1^2 + \frac{2}{u_1}y_1 + \frac{1}{u_1^2}$$

ضرب در u_1^2 کردیم

$$\Downarrow$$

$$-u_1' + p(x)u_1 = 2r(x)\overset{\text{معلوم}}{y_1} + r(x)$$

روش کاهش مرتبه:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad y_1(x) = v$$
$$y_2(x) = ?$$

$$y = y_1 \cdot y_2 \longrightarrow y' = y_1' y_2 + y_2' y_1$$

Sahand

در معادله‌ای که به دست آمد این‌ها را صفر می‌گذاریم $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1$

۵ آبان ۹۵

$$y''(t) + t\, y'(t) + r(t)\, y(t) = 0$$

فرض کنید $r(t)$ در بازه‌ی $[0,+\infty)$ مشتق پیوسته دارد و $y_1(t)=t$

جواب دیگر معادله را بدست آورید $y_2(t)=?$

$$y_2 = t\,.\,z(t) \qquad z(t)=?$$

$$y_2' = z(t) + t z'(t)$$

$$y_2'' = 2z'(t) + t z''(t)$$

صفر می‌شود

$$\underbrace{(2z'(t) + t z''(t))}_{y''(t)} + t\underbrace{(z(t) + t z'(t))}_{y'(t)} + \underbrace{r(t)}_{-1}(t z(t)) = 0$$

جواب: y_1 را جایگذاری کنیم تا $r(t)$ را بیابیم:

$$0 + t + r(t)t = 0 \Rightarrow r(t) = -1$$

هدف رسیدن به معادله‌ای بود که مرتبه آن کاهش یافته باشد یا z'' حذف شود یا z.

$$t z''(t) + (2+t) z'(t) = 0$$

$$z'(t) = S \rightarrow tS' + (2+t)S = 0 \qquad S = e^{-\int \frac{2+t}{t}}$$

$$z(t) = \int S(t)\,dt$$

برای اثبات استقلال خطی باید رانسکین را حساب کنیم و در یک نقطه نشان دهیم غیرصفر است.

$$y_2 = t \cdot z(t)$$

$$z(t) = \int e^{-\int \frac{2+t}{t}\,dt}\,dt = \int e^{-2\int \frac{1}{t}} \times e^{-t}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2} e^{-t}\,dt \qquad z'(t)$$

$$y_2' = z(t) + t\,z'(t) \qquad \Rightarrow W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t & t\cdot z(t) \\ 1 & z(t)+tz'(t) \end{vmatrix}$$

$$= tz(t) + t^2 z'(t) - tz(t) = t^2 z'(t) = e^{-t}$$

۹۵ آبان ؛ e^t

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

$$e^t \qquad te^t \qquad e^{-t}\sin(2t) \qquad e^{-t}\cos(2t)$$

می دانیم اگر مثلاً $x_1=1, x_2=2$ برای نوشتن معادله:

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{جمع ریشه ها}}x + \underbrace{x_1x_2}_{\text{ضرب ریشه ها}} = 0$$

مثلاً برای $ax^3+bx^2+cx+d=0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = x_1+x_2+x_3$

$$\frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \qquad -\frac{d}{a} = x_1x_2x_3$$

Sahand

همین عملیات را می‌خواهیم برای معادلات دیفرانسیل انجام دهیم.

سؤال ما تشکیل معادله‌ی دیفرانسیل است با داشتن جواب‌ها

وارتباط بین ضرایب وریشه‌ها

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

$$\boxed{y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2} \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

y_c وابسته است به y_1 و y_2

حال اگر رانسکین سه‌ رو را بگذاریم :

$$W(y_c, y_1, y_2) = \begin{array}{c} \text{مجهول} \\ \uparrow \\ \end{array} \begin{vmatrix} y_c & y_1 & y_2 \\ y_c' & y_1' & y_2' \\ y_c'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \overset{\text{حتماً}}{=} 0$$

چون y_c وابسته است

$$\overset{①}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')}\, y'' - \overset{②}{(y_1 y_2'' - y_1'' y_2)}\, y' + \overset{③}{(y_1' y_2'' - y_1'' y_2')} = 0$$

تقسیم ② و ① می‌شود ضریب $p(x)$ ، وتقسیم ③ و ① می‌شود ضریب $q(x)$

سؤال مهمی است که ریشه‌ها را بدهند و ما معادله را تشکیل دهیم.

مثلاً اگر بگویند یک جواب $\sin x$ و یک جواب $\cos x$ است می‌دانیم $y''+y=0$ معادله‌ای است برای این جواب‌ها

«مراحل بالا یک روش کلی برای حل بود، اما برای سؤال ۲ آبان ۹۵ این کار امکان‌پذیر نبود»

مثلاً : $y'' - 7y' + 5y = 0$ $\qquad y = e^{\alpha x}$

$$\alpha^2 - 7\alpha + 5 = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{7 \pm \sqrt{49-20}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{7-\sqrt{29}}{2}$$

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

اگر جواب مختلط شد یعنی زیر رادیکال منفی شد جواب به این صورت است :

مثلاً: $\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{49-60}}{2}$

$$\longrightarrow e^{\frac{7}{2}x}\sin\left(\sqrt{\tfrac{11}{4}}\,x\right)$$

$$\longrightarrow e^{\frac{7}{2}x}\cos\left(\sqrt{\tfrac{11}{4}}\,x\right)$$

در مسئله ی آبان ۹۵ $-1 \pm 2i$ را داریم :

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_{3,4} = -1 \pm 2i$$

$$(\alpha-1)^2(\alpha-(-1+2i))(\alpha-(-1-2i)) = 0$$

e^t یعنی ریشه ۱ بوده $\qquad te^t$ یعنی ریشه ی یک دو بار تکرار شده

t^2e^t اگر می‌گفت $=$ یعنی ۱ سه بار تکرار شده بوده و باید می‌گفتیم $(\alpha-1)^3$