۳،۸،۹۶

معادله‌ی کلرو (لاگرانژ) $\quad y = x\,g(\underbrace{y'}_{p}) + f(\underbrace{y'}_{p}) \qquad y = xy' + f(\underbrace{y'}_{p})$

$$y = xp + f(p) \qquad (x,p)$$

$$y' = p = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow \frac{p'}{f'(p)p'} = -\frac{1}{x}$$

مثال:

$$y = 2x\overbrace{y'}^{p} + \frac{1}{\underbrace{y'^2}_{p}} \qquad y' = p$$

$$p = 2xp' + 2p - \frac{2p'}{p^3} \longrightarrow -p = 2p'\left(x - \frac{1}{p^3}\right)$$

تابع همگن : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

گاهی می‌گیریم $\frac{y}{x} = v$ و گاهی $\frac{x}{y} = v$

~~$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$~~

$$(-p) = 2p'\left(x - \frac{1}{p^3}\right) = 2\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^3}\right)$$

$$(-p)\underbrace{\left(\frac{dx}{dp}\right)}_{x'} = 2x - \frac{2}{p^3}$$

مثال: معادله‌ی زیر را از طریق کامل کردن حل کنید. (پاییز ۹۵)

$$\underbrace{(ax + by)}_{M}dx + \underbrace{(cx + dy)}_{N}dy = 0$$

«اگر جای M تابعی برحسب x، بجای N هم تابعی برحسب y بود بازهم شرط کامل سازی همین بود»

$$\Delta = M_y - N_x = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = b - c = 0 \Rightarrow \boxed{b = c}$$

$$df = \underbrace{(ax + by)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + \underbrace{(bx + dy)}_{\frac{\partial f}{\partial y}}dy = 0$$

$$f(x,y) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ax + by \rightarrow f = \dfrac{ax^2}{2} + bxy + g(y) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = bx + g'(y) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = bx + dy \Rightarrow bx + g'(y) = bx + dy \Rightarrow g(y) = \dfrac{dy^2}{2} + \underbrace{c_1}_{\text{عدد}} \end{cases}$$

راه حل تستی: از هر دو تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ انتگرال بگیریم و حاصل را با هم جمع کنیم، فقط آن هایی که تکراری هستند تنها یکبار نوشته می شوند.

DATE / / SUBJECT:

از $\frac{\partial f}{\partial x}$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم و از $\frac{\partial f}{\partial y}$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ax+by \rightarrow \frac{ax^2}{2} + bxy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + dy \rightarrow bxy + \frac{dy^2}{2}$$

$$\Rightarrow f = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{dy^2}{2} + c$$

مثال (پائیز ۹۵)

$$\underbrace{y}_{M_1(x,y)} dx + \underbrace{x(1-3x^2y^2)}_{N_1(x,y)} dy = 0$$

عامل ← $x^\alpha \cdot y^\beta$

$$x^\alpha \cdot y^\beta \cdot (y \cdot dx + x(1-3x^2y^2)\, dy) = 0$$

$$\underbrace{(x^\alpha y^{\beta+1})}_{M(x,y)} dx + \underbrace{[x^{\alpha+1} y^\beta (1-3x^2y^2)]}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow (\beta+1) x^\alpha y^\beta = (\alpha+1) x^\alpha y^\beta - 3(\alpha+3) x^{\alpha+2} y^{\beta+2}$$

برای حذف یک عبارت از طرفین، آن عبارت نباید صفر باشد.

$$\underbrace{(\beta - \alpha)}_{0} x^\alpha y^\beta + 3\underbrace{(\alpha+3)}_{0} x^{\alpha+2} y^{\beta+2} = 0$$

" باید عبارت را ببریم یک سمت و مساوی صفر قرار دهیم "

$\beta = \alpha$ $\qquad$ $\boxed{\alpha = -3} = \beta$

" عامل انتگرال ساز یکتا نیست "

Sahand

Scanned by CamScanner

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$ تغییر متغیر

مثال:

$$dx + 2xy\,dy + y\,dy = e^{-y^2}\,dx$$

« معمولاً از روش کامل‌سازی سؤال می‌آید »

$$(1 - e^{-y^2})\,dx + (2xy + y)\,dy = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (2y\,e^{-y^2}) - (2y) = 2y(e^{-y^2} - 1)$$

دوتا راه گفتیم قبلاً : $\frac{\Delta}{-M} = f(y) \rightarrow e^{\int f(y)\,dy}$ $\quad \frac{\Delta}{N} = f(x) \rightarrow e^{\int f(x)\,dx}$

$$\rightarrow \frac{2y(e^{-y^2} - 1)}{e^{-y^2} - 1} = 2y \rightarrow \rho = e^{2\int y\,dy} = e^{y^2}$$

پیکارد (وجود و یکتایی) $\left\{ f(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} \right.$

پیوسته

این رو باید حل کنیم برحسب y

$$y' = f(x,y)$$

شرایط مرزی : $y(0) = 1$

مثال: $y' = y^{\frac{1}{3}}$ و $y(0) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ناپیوسته است و تضمینی نیست که جواب واحد داشته باشد.

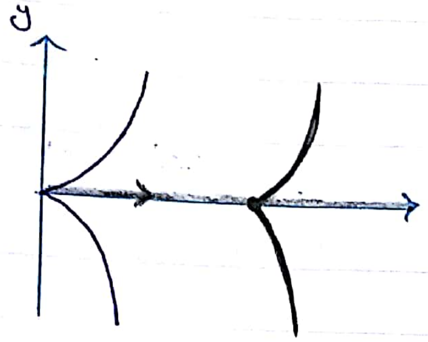
$$\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = \int dx \Rightarrow \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = x + C \Rightarrow y = \pm\left[\frac{2}{3}(x+C)\right]^{\frac{3}{2}}$$

$y(0) = 0 \rightarrow C = 0$, $\boxed{y = \pm\left[\frac{2}{3}x\right]^{\frac{3}{2}}}$ و $\boxed{y = 0}$

DATE / / SUBJECT: لا حتماً باید باشه

وقتی $y^{\frac{1}{3}}$ را آوردیم مخرج باید شرط می‌گذاشتیم که صفر نباشد.

می‌خواهیم ببینیم می‌شود دو جواب را تلفیق کرد؟



$y=0$

با مقدار روی $y=0$ پیش برویم و بعد

۲ سمت $y=\pm\left[\frac{2}{3}x\right]^{\frac{3}{2}}$

$$y=\begin{cases}0 & 0\le x<x_0\\ \pm\left[\frac{2}{3}(x-x_0)\right]^{\frac{3}{2}} & x_0\le x\end{cases}$$

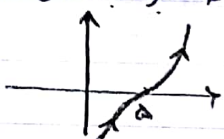
صورت دیگر تکنیک پیکارد: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$\frac{1}{x-2}$ ، $x>2$ ، x^2 مثلاً

این ضریب حتماً یک است.

پائیز ۹۵: همه‌ی جواب‌های معادله را به دست آورید؟

$y'(t)=(y(t))^{\frac{4}{5}}$ $\quad y(0)=-1$



$\frac{y'}{y^{\frac{4}{5}}}=1 \sim \frac{y^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}=x+c$

از یک جایی به بعد شرط اولیه دو مسئله صدق می‌کند.

فروردین ۹۵: $0<\alpha<2$ وجود یکتایی و دامنه $y'=y^\alpha$

$y(0)=\lfloor\alpha\rfloor$ جزء صحیح ، floor

کف رو به پایین گرد می‌کنه $\lfloor 2,3\rfloor=2$ کف رو به بالا $\lceil 2,3\rceil=3$

$0<\alpha<1 \to y(0)=0$

$1\le\alpha<2 \to y(0)=1$

$\alpha y^{\alpha-1}$

می‌خواهیم پیوسته حوالی صفر

پیوسته هست باید باید $\alpha-1\ge 0$ باشد

DATE / / SUBJECT:

اردیبهشت سال ۹۰

$$y_1 = 1-t \quad , \quad y_2 = -\frac{t^2}{4}$$

$$y' = \boxed{\frac{-t + (t^2+4y)^{\frac{1}{2}}}{2}} \rightarrow f(t,y)$$

$$y(2) = -1$$

دو جواب y_1 و y_2 در چه دامنه‌ای اعتبار دارند؟

چرا دو جواب قضیه‌ی یکتایی را نقض نمی‌کنند؟

جواب‌ها رو باید دونه دونه حل کنیم.

(I) $t^2 + 4y = t^2 + 4(1-t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{t^2+4y}}$$

$\rightarrow$ مخرج صفر شده $y_2 = \frac{-t^2}{4}$ به ازای ...

و ناپیوسته می‌شود. در حالیکه قضیه‌ی یکتایی در

منطقه باید پیوسته باشد تا جواب یکتا باشد و به همین دلیل ناپیوستگی دو جواب

به دست آمده و قضیه نقض نشده است.

(I) ادامه‌ی: $\rightarrow t-2 \quad t \geq 2$

$\searrow 2-t \quad t < 2$

چون مشتق y_1 می‌شود (-1)

$$y' = \frac{-t+t-2}{2} = -1 \checkmark \quad \text{یا} \quad \frac{-t+2-t}{2} = 1-t \times$$

جواب‌ها را در معادله بگذاریم و حل کنیم پیوسته هستن یا نه و برای بررسی اعتبار باید با جواب

اولیه حل شود.

DATE / / SUBJECT: $y' + \frac{1}{\tan x} y = \frac{3x}{\tan x \cos x}$

$\sin x$

1) $y' \tan x + y = \frac{3x}{\cos(x)}$

$y' + p(x) y = q(x)$ $\qquad y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} + c\right]$ ۹۴-

2) $\left(3x^2 \tan(y) - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(4y^3 + \frac{x^3}{\cos^2 y} + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0$

با نوشتن M و N

3) $e^x . dx + \left(e^x \cot y + \frac{2y}{\sin y}\right) dy = 0$ با تقسیم بر M و N

همگن $\qquad$ با تغییر متغیر $\frac{y}{x} = v$ $\qquad y' = v'x + v$

4) $(x^2 + xy) y' = x\sqrt{x^2 + y^2} + xy + y^2$

معادله برنولی

5) $y' = \frac{y}{2} \cos(x) + \frac{\sin(2x)}{y}$

6) $y' = -2(\underbrace{2x + 3y}_{u} - 7)^2$

7) $y' = \frac{x - y + 7}{x + y + 5}$ اگر اعداد ثابت نبودند با تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ قابل حل بود

اما اعداد ثابت هستند.

$x = X + a \qquad \frac{(X+a) - (Y+b) + 7}{(X+a) + (Y+b) + 5} \rightsquigarrow \begin{cases} a - b + 7 = 0 \\ a + b + 5 = 0 \end{cases}$

$y = Y + b$

-۹۰

$dx + \left(\frac{x}{y} - \sin(y)\right) dy = 0$ عامل انتگرال ساز؟

$y' + p(x) e^{-y} = q(x)$

$y' + p(x)\, y = q(x)$

$y = f(u) \rightarrow y' = f'(u) \cdot u'$

$(f'(u) \cdot u') + p(x)\, f(u) = q(x)$

$$u' + p(x) \frac{f(u)}{f'(u)} = \frac{q(x)}{f'(u)}$$

اگر بگیرید: $u = y^{1-n}$ یا $y = e^{u} \longrightarrow \frac{f(u)}{f'(u)} = 1, \quad \frac{q(x)}{f'(u)} = q(x) e^{-y}$

فصل دوم:

$y'' + \underbrace{p(x)\, y'}_{\text{همواره}} + q(x) y = r(x)$

می‌توان این را حذف کرد

$y = y_c + y_p$

جواب خصوصی ← جواب عمومی

$ax^2 + bx + c = 0$

$\underbrace{a(x + \frac{b}{2a})}_{X}{}^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$

$X^2 = \boxed{\quad}$

$y = y_1 \cdot y_2 \rightarrow y' = y_1' \cdot y_2 + y_2' \cdot y_1$

$\rightarrow y'' = y_1'' \cdot y_2 + 2y_1' y_2' + y_1 y_2''$

$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$(y_1'' \cdot y_2 + 2y_1' y_2' + y_1 y_2'') + p(x)(y_1' \cdot y_2 + y_2' \cdot y_1)$

نگه دارم

جواب معلوم

$+ q(x)\, y_1 \cdot y_2 = r(x)$

$x = \frac{-b}{3a} + \sqrt[3]{\quad} + \sqrt[3]{\quad}$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$a(x + \frac{b}{3a})^3 + \dots$

$X^3 + pX + q = 0$

ادامه در صفحه‌ی بعد

DATE / / SUBJECT:

$$2y_1' \cdot y_2' + p(x)\, y_1' \cdot y_2 = 0$$

$$2y_2' + p(x)\, y_2 = 0 \longrightarrow y_2 = e^{-\int \frac{p(x)}{2}}$$

$$y'' + \square y = 0 \qquad \text{مثلاً}: y'' - 2y' + y = 0 \qquad \boxed{y = e^{\alpha x}}$$

حل با فرض ثابت

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - 2e^{\alpha} e^{\alpha x} + e^{\alpha x} = 0$$

$\alpha_{1,2} = 1$ اصم | $\boxed{\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0}$ در حالت کلی این معادله دو جواب دارد.

جواب عمومی $y_c = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$

$y_c = c_1 e^{x} + c_2$ (؟) وقتی هر دو جواب چون یک است چه کنیم؟

$\boxed{\alpha_{1,2} = 1} \longrightarrow x \cdot e^{x}$

مثلاً : $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \qquad \alpha = 1 \longrightarrow$ سه جواب می خواهیم

در حالیکه تنها یک جواب داریم پس

می نویسیم e^{x} , xe^{x} , x^2e^{x} . باید استقلال خطی این جواب ها را بررسی کنیم.

به دنبال سه جواب مستقل هستیم.