Amin_NajafiAmin@yahoo.com

DATE / / SUBJECT:

سؤال : $\boxed{(2xy + 2x^2y^3)y' = 1}$ ?

۸۹۶/۷/۲۶

1) "A Compendium on nonlinear ODE p.L.SAchDEV

2) Hand book of exact solution for ODE Amdvei D.polyanin Valentin F.zaitsev

دو کتاب حل تمرین که خواندن آن ها خالی از لطف نیست :)

بسط تیلور

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

یکی از کاربردهای اساسی سری تیلور خطی سازی است .

$$\boxed{e^x = 1 + x} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

این بخش اول یعنی خطی سازی .

دیفرانسیل مرتبه دوم اگر تقسیم بر $\Delta x^2$ بشود ، مشتق مرتبه‌ی دوم را می دهد.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \underbrace{(f_x \cdot \Delta x + f_y \Delta y)}_{df} + \cdots$$

مشتق جزئی نسبت به $x$

$$f_x \triangleq \frac{\partial f}{\partial x}$$

دیفرانسیل $f$ — دیفرانسیل کامل

مثال: $f(x,y) = x^2y \rightsquigarrow df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 2xy\,dx + x^2dy$

DATE / / SUBJECT:

برای تبدیل عبارت‌ها به دیفرانسیل کامل باید طرفین در چیزی مانند $\rho(x,y)$ ضرب شوند.

کامل (کامل پذیر)

$$df = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{N(x,y)} dy$$

$$y'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} \underset{\text{خوب این}}{\overset{\text{برای توابع}}{=}} \frac{d^2 f}{dy\,dx}$$

تساوی را داریم

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$ محک کامل بودن

مثال:

$$\underbrace{e^x}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(e^x \cot y + \frac{2y}{\sin y}\right)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$0 = e^x \cot y$ « مسئله کامل نیست و باید در چیزی ضرب شود تا کامل شود »

سال ۹۲ شریف : $\rho(x,y) = y$

$$y\,(y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0)$$

$$\underbrace{y^2}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(2xy - y^2 e^y)}_{N(x,y)} dy = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

دیفرانسیل کامل

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 & f(x,y) = \int y^2 dx = xy^2 + c(y) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + c'(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - y^2 e^y & 2xy + c'(y) = 2xy - y^2 e^y \end{cases}$$

$$\rightarrow c'(y) = -y^2 e^y \rightarrow c(y) = \int -y^2 e^y dy$$

$$f(x,y) = xy^2 - (y^2 - 2y + 2) e^y + c_1$$

| مشتق | انتگرال |
|---|---|
| $y^2$ | $e^y$ |
| $2y$ | $e^y$ |
| $2$ | $e^y$ |
| $0$ | $e^y$ |

انتگرال جزء به جزء

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}$$

$M_y - N_x$

مفسر کامل بودن

if $\Delta = 0 \longrightarrow$ کامل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

if $\Delta \neq 0$ ?

$$\underbrace{\rho(x,y)\, M(x,y)}_{M_1(x,y)}\, dx + \underbrace{\rho(x,y)\, N(x,y)}_{N_1(x,y)}\, dy = 0$$

DATE / / SUBJECT:

$$\frac{\partial(\rho M)}{\partial y}$$

$$(\rho M)_y = (\rho N)_x$$

$$\rho_y M + \rho M_y = \rho_x N + \rho N_x$$

شد یه معادله‌ی PDE چون مشتق $\rho$ هم نسبت به x هست و هم نسبت به y

جزئی

$$\underbrace{(\rho_y M - \rho_x N)}_{0} + \rho\underbrace{(M_y - N_x)}_{\Delta} = 0$$

$$(N)\rho_x - \Delta\rho = 0$$

$$\rho_x - \frac{\Delta}{N}\rho = 0 \rightarrow \rho = e^{\int \frac{\Delta}{N}dx}$$

| | $\mu$ |
|---|---|
| $\frac{\Delta}{N}$ | $f(x) \rightarrow e^{\int f(x)dx}$ |
| $\frac{\Delta}{\ominus M}$ | $f(y) \rightarrow e^{\int f(y)dy}$ |
| $\frac{\Delta}{yN - xM}$ | $f(x.y) \rightarrow e^{\int f(xy)d(xy)}$ |
| $\frac{\Delta}{N - M}$ | $f(x+y)$ |

درس

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$z = xy \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x \end{cases}$$

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \rightarrow y = e^{\int -p(x)dx}$$

$$\rho_y = \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \rho_z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \rho_z x$$

$$\rho_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \rho_z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \rho_z y$$

$$\rho_y M - \rho_x N + \rho\Delta = 0$$

$$\rho_z(xM) - \rho_z(yN) + \rho\Delta = 0$$

Sahand

$$(xM - yN)\,\rho_z + \rho\Delta = 0 \longrightarrow \rho = e^{\int \frac{\Delta}{yN - xM} dz}$$

$f(xy) = f(z)$

حالت کلی تر جدول :

$$\frac{\Delta}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} \sim f(z) \qquad \rho = e^{\int f(z)dz}$$

معادلات خطی مرتبه اول :

خطی بودن بخاطر اینکه $y$ و $y'$ هر دو توان یک دارند.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}$$ جواب معادله همگن

$$y = \underbrace{y_c}_{\text{جواب عمومی}} + \underbrace{y_p}_{\text{جواب خصوصی}}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y_c = c_1 e^{-\int p(x)dx} \longrightarrow y' + p(x)y = 0$$

ضریب ثابت

$$y_p = ?$$

$$e^{\int p(x)dx} = \rho(x)$$

عامل انتگرال ساز

$$y_p = \frac{1}{\rho(x)} \int q(x)\rho(x)dx$$

DATE / / SUBJECT:

حل سؤال حلسه ی قبل :

$$(2xy + 2x^2y^3)\,y' = 1 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$(2xy + 2x^2y^3)\,dy = dx$$

$$2xy + 2x^2y^3 = \frac{dx}{dy} = x'$$

همون معادله ی برنولی است $\boxed{n=2}$

$$x' - 2yx = (2y^3)\,x^2$$

اما به جای اینکه y را بر حسب x بنویسیم با برعکس عمل کنیم .

۴,۸,۹۶ 8