



تاریخ: ۹۶/۹/۲۳

شماره:

پیوست:

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی مهندسی

۲۲-۰۳۵

نیمسال اول ۹۶-۹۷

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. n -ضلعی منتظمی را که در دایره‌ای به شعاع ۱ محاط است در نظر بگیرید ($n \geq 4$). یک رأس دلخواه از این n -ضلعی را به $n-3$ رأس غیر مجاورش وصل می‌کنیم تا به این تعداد، قطر از آن را به دست آوریم. با استفاده از مفاهیم اعداد مختلط، حاصل ضرب اندازه این قطرها را به طور صریح محاسبه کنید.

سؤال ۲. تابع f با ضابطه $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2i|z|^2 + 2(1-i)z$ را در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه تمام نقاطی از صفحه مختلط را که تابع f در آن‌ها مشتقپذیر است مشخص کرده و در آن نقاط مشتق را محاسبه کنید. تابع f در چه نقاطی از صفحه مختلط تحلیلی است؟ چرا؟

(ب) خم C را یک نیم‌دایره در نظر بگیرید که نقطه ۱ را به نقطه -1 وصل می‌کند. حاصل انتگرال

$$I = \int_C f(z) dz$$

را محاسبه کنید.

سؤال ۳. میدان‌های $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ و $D_2 = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 1\}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نگاشتی بیابید که D_1 را به طور یک‌به‌یک، پوشا و همدیس به روی D_2 بنگارد.

(ب) نشان دهید اگر $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تام باشد با این ویژگی که $f(\mathbb{C}) \subseteq D_2$ ، آنگاه f تابعی ثابت است.

سؤال ۴. با استفاده از فرمول انتگرال کشی و قضیه مشتق، حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{(z-1)(z-i)^2} dz.$$

سؤال ۵. تابع f با ضابطه $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2+1)}$ را در نظر بگیرید.

(الف) تابع f را حول صفر روی حلقه باز $1 < |z| < 2$ به سری لوران بسط دهید.

(ب) با استفاده از سری لوران به دست آمده در قسمت (الف)، حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{|z|=3/2} \frac{z^{10}}{(z+2)(z^2+1)} dz.$$

(ج) با استفاده از قضیه مانده، حاصل انتگرال بالا را محاسبه کنید.

سؤال ۶. حاصل انتگرال حقیقی ناسره زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx.$$

سؤال ۲: ۱۰+۱۰ نمره،

سؤال ۴: ۱۰ نمره،

سؤال ۶: ۱۰ نمره.

سؤال ۱: ۱۰ نمره،

سؤال ۳: ۱۰+۱۰ نمره،

سؤال ۵: ۱۰+۱۰+۱۰ نمره،

مجموع: ۱۰۰ نمره