به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

ساعت ۳ بعدازظهر ۹ آذر ۱۳۹۶

ریاضی عمومی دو

امتحان میان ترم

- توصیه می‌شود قبل از پاسخ دادن، صورت سوال را کامل تا انتها بخوانید.
- در پاسخ تمام سوالات آزمون، توضیحات کامل و رسا باشد و محاسبات لازم صورت گیرد.
- اگر صورت سوال، راه حل خاصی را از شما مطالبه نکرده است، در انتخاب راه حل آزاد هستید.
- سوالات در یک برگه و دو صفحه تنظیم شده است.

سوال ۱. *تبدیل خطی*

$$\begin{cases} B : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}^{۲} \\ B(x,y,z) := (۲x + ۳y, ۳x + ۷z) \end{cases}$$

را درنظر بگیرید. مطلوب است بدست آوردن نمایش ماتریسی این تبدیل خطی در پایه‌های استاندار $\mathbb{R}^{۳}$ *و* $\mathbb{R}^{۲}$ *و بدست آوردن پایه‌ای برای* $\ker(B) = \{X \in \mathbb{R}^{۳} \mid B(X) = ۰ \in \mathbb{R}^{۲}\}$ *و محاسبه بعد آن و نیز بدست آوردن پایه‌ای برای* $\mathrm{Im}(B) := \{B(X) \in \mathbb{R}^{۲} \mid X \in \mathbb{R}^{۳}\}$ *و محاسبه بعد آن. منظور از پایه استاندارد* $\mathbb{R}^n$*، بردارهای* $\{e_۱ = (۱, ۰, \ldots, ۰), e_۲ = (۰, ۱, ۰, \ldots, ۰), \ldots, e_n = (۰, \ldots, ۰, ۱)\}$ *در* $\mathbb{R}^n$ *است.* (۲۰ نمره)

سوال ۲. *نگاشتی با مشتقات جزیی پیوسته مانند*

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longmapsto F(x,y,z) \end{cases}$$

معرفی کنید که مجموعه $\{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = ۱\}$ *بیانگر شکلی شبیه چنبره سه سوراخه باشد بطوریکه یک سوراخ در وسط و دو سوراخ دیگر نسبت به سوراخ وسط کاملا قرینه باشد. به اختصار مانند آنچه در کلاس گذشت توضیحی درباره نگاشتی که معرفی می‌کنید ارائه دهید که چرا شکل مورد نظر را ایجاد می‌کند. در صورت لزوم می‌توانید از معادله چنبره یک سوراخه استفاده کنید و نیازی نیست معادله آن را بدست آورید.* (۱۰ نمره)

سوال ۳. *مختصات قطبی*

$$\begin{cases} \Phi : (۰, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{۲} \\ \Phi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) \end{cases}$$

را در نظر بگیرد.

الف. مطلوبست محاسبه مشتق Φ. (۵ نمره)

ب. برای تابع با مشتقات پیوسته از مرتبه اول که $(x,y)=(\text{۰},\text{۰})$ در دامنه‌اش قرار ندارد، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را برحسب $\frac{\partial f o\Phi}{\partial r}:=\frac{\partial f}{\partial r}$ و $\frac{\partial f o\Phi}{\partial \theta}:=\frac{\partial f}{\partial \theta}$ بدست آورید که در آن منظور از $fo\Phi$ ترکیب توابع Φ و f است. در صورت لزوم می‌توانید از قضیه نگاشت وارون استفاده کنید. (۱۰ نمره)

ج. برای تابع با مشتقات پیوسته از مرتبه دوم که $(x,y)=(\text{۰},\text{۰})$ در دامنه‌اش قرار ندارد، $\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial x^{\text{۲}}}$ و $\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial y^{\text{۲}}}$ را برحسب مشتقات نسبت به r و θ، یعنی $\frac{\partial f}{\partial r}$ و $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial r^{\text{۲}}}$ و $\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial \theta^{\text{۲}}}$ و $\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial r\partial \theta}$، بدست آورده و سپس معادله لاپلاس $\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial x^{\text{۲}}}+\frac{\partial^{\text{۲}} f}{\partial y^{\text{۲}}}=\text{۰}$ را در مختصات قطبی باز بیان کنید. در صورت لزوم می‌توانید از قضیه نگاشت وارون استفاده کنید. (۱۰ نمره)

سوال ۴. فرض کنید برای n ،$i,j=\text{۱},\dots,$ ،$a_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی با مشتق پیوسته هستند بطوریکه برای هر $t\in\mathbb{R}$ ماتریس $A(t)$ پایین وارون پذیر است.

$$\begin{cases} A:\mathbb{R}\to M_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ A(t)=\left[a_{ij}(t)\right] \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه ماتریس $\frac{d}{dt}(A(t))^{-\text{۱}}$ برحسب ماتریسهای $\frac{d}{dt}A(t)$ و $(A(t))^{-\text{۱}}$. راهنمایی: لزومی ندارد از فرمول ماتریس وارون استفاده کنید. می‌توانید از این قضیه استفاده کنید که برای هر دو ماتریس $A(t)\ ,\ B(t)\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ با درایه‌های مشتقپذیر داریم $\frac{d[AB]}{dt}=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$. (۵ نمره)

سوال ۵. کره $\mathbb{S}^{\text{۲}}:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{\text{۳}}\mid x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}=\text{۱}\}$ را در نظر بگیرید. برای خم $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^{\text{۲}}$ که بر حسب طول پرمایش شده است، $\left|\gamma''(t)\right|=k<\text{۱}$ مقداری ثابت است. اگر داشته باشیم $\gamma(\text{۰})=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۶}}}(\text{۲},\text{۱},-\text{۱})$ و $\gamma'(\text{۰})=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}(\text{۱},-\text{۱},\text{۱})$ و $B(\text{۰})$ موازی بردار $(\text{۱},\text{۲},\text{۱})$، معادله (پرمایش شده برحسب طول) این خم را بیابید. ارجاع دادن به تمرینی که در این زمینه در تمرینها آمده بود مجاز نیست. (۲۰ نمره)

سوال ۶. دوران به اندازه زاویه $\theta\geq\text{۰}$ را در جهت v راستگرد گوییم اگر با حرکت در جهت دوران به اندازه زاویه θ، قاعده دست راست جهت مثبت v را نشان دهد. ماتریس دوران راستگرد R_θ در جهت $(\text{۱},\text{۱},\text{۱})$ به اندازه زاویه دلخواه مثبت θ را بیابید. سپس با در نظر داشتن نگاشت انتقال $T_u(x,y,z):=(x+u,y+u,z+u)$ در $\mathbb{R}^{\text{۳}}$، برای $t\geq\text{۰}$ معادله خم $\eta(t)$ را بیابید که $\eta(\text{۰})=(\text{۲},\text{۱},\text{۱})$ و $\eta(t)=T(\text{۲}t)[R_t\eta(\text{۰})]$. اگر از ماتریس تغییر پایه استفاده می‌کنید، توصیه می‌شود ماتریسی را انتخاب کنید که دترمینان آن ماتریس مثبت باشد. همچنین می‌توانید از حکم تمرینی که بر گزاره پایین دلالت می‌کرد استفاده کنید و نیازی نیست درستی این گزاره را نشان دهید: برای تبدیل خطی حافظ طول $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$، $A^{-\text{۱}}=A^T$ که در آن A^T ترانهاده ماتریس A است. (۲۰ نمره)

موفق و پیروز و سربلند باشید