

به نام خدا  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی



مدت امتحان: ۳ ساعت

ساعت ۳ بعد از ظهر ۱۹ دی ۱۳۹۶

ریاضی عمومی دو

امتحان پایان ترم

– استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

– توصیه می‌شود قبل از پاسخ دادن، صورت سوال را کامل تا انتها بخوانید.

– در پاسخ تمام سوالات آزمون، توضیحات کامل و رسا باشد و محاسبات لازم صورت گیرد.

– اگر صورت سوال، راه حل خاصی را از شما مطالبه نکرده است، در انتخاب راه حل آزاد هستید.

– سوالات در یک برگه و دو صفحه تنظیم شده است.

سوال ۱. اگر در ربع اول صفحه مختصات، تمام پاره خطهای واصل بین دو محور با طول یک را در نظر بگیریم، مطلوبست بدست آوردن معادله خم مرز ناحیه پوشیده شده توسط این پاره خطها در ربع اول (دو پاره خط واقع بر محورهای مختصات مورد نظر نیستند. فقط مرز منحنی شکل) (۱۵ نمره)

سوال ۲. بزرگترین ریشه حقیقی معادله  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  را با  $x(a, b, c)$  نشان می‌دهیم. از طرفی می‌دانیم که  $x(0, -1, 0) = 1$  و با استفاده از بسط تیلر (و با در نظر داشتن خطا) داریم

$$x(a, b, c) \simeq x(a_0, b_0, c_0) + (a - a_0, b - b_0, c - c_0) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c} \right).$$

حال مطلوبست بدست آوردن مقدار تقریبی  $x(0/1, -1, 0/1)$  با استفاده از فرمول بالا. (۱۵ نمره)

سوال ۳. اگر  $A$  بیانگر ناحیه داخل کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  و خارج استوانه  $x^2 + y^2 = 2$  باشد (یعنی ناحیه‌ای از درون کره که بعد از حذف درون استوانه باقی می‌ماند)، مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\iiint_A (x^2 + y^2) dV.$$

(۱۵ نمره)

سوال ۴. برای رویه  $S$  به معادله  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$  که بین صفحات  $z = 1$  و  $z = \sqrt{5}$  قرار دارد، مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\iint_S z \, dS.$$

(۱۵ نمره)

سوال ۵. تابع  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$  را در نظر بگیرید.

• الف) تمام نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x, y)$  را بدست آوردید. در گام بعدی از میان نقاط بدست آمده نقاط بیشینه و کمینه و زینی را مشخص کنید. یادآوری: نقطه بحرانی نقطه‌ای است که در آن نقطه  $(0, 0)$   $\nabla f = (0, 0)$ . راهنمایی: از تقارن تابع نیز می‌توانید استفاده کنید. (۱۵ نمره)

• ب) مطلوبست بدست آوردن مقدار بیشینه تابع  $f(x, y)$  با داشتن قید  $x^2 + xy + y^2 = 1$ . (۱۵ نمره)

سوال ۶. برای  $(x, y) \neq (0, 0)$ ، میدان برداری  $F(x, y) := \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  را در نظر بگیرید. اگر  $q$  بیانگر مربع  $4 = |x| + |y|$  باشد و روی این مربع در جهت مثلثاتی یا همان پادساعتگرد حرکت کنیم، مطلوبست محاسبه انتگرال خط

$$\oint_q F \cdot dr$$

یادآوری: حرکت در جهت پادساعتگرد روی یک خم حول مبدا، یعنی خم پرمایش شده  $(x(t), y(t))$  با حرکت در جهت مثبت زمانی، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور مبدا حرکت کند. (۱۰ نمره)  
راهنمایی اول: می‌توانید خم را در هر یک از چهار ربع پرمایش کرده، سپس انتگرالها را بدست آورده و با هم جمع کنید.

راهنمایی دوم: می‌توانید از قضیه گرین در ناحیه‌ای استفاده کنید که میدان برداری در آن ناحیه دارای مشتق پوسته است.

موفق و پیروز و سربلند باشید