

سوال ۱: جواب عمومی معادلات مرتبه اول زیر را پیدا کنید:

$$\text{الف) } \ln\left(\frac{y'}{x}\right) = y - x^2$$

$$\text{ب) } y \ln(x) \ln(y) dx + dy = 0$$

$$\text{پ) } x^2 y' = 3(x^2 + y^2) \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + xy$$

$$\text{ت) } (\ln(x) + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0$$

$$\text{ث) } xy' + y \ln(x) = y \ln(y) + y$$

$$\text{ج) } e^x(x+1) dx + (y e^y - x e^x) dy = 0$$

$$\text{د) } y' = y - xy^3 e^{-2x}$$

$$\text{م) } y' = \sin(x - y)$$

$$\text{ن) } yy'' = y^2 y' + y'^2$$

$$\text{و) } (2xy + 2x^2 y^3) y' = 1$$

$$\text{ه) } yy' = x (y')^2 - 1$$

$$\text{ی) } 1 + (y')^2 = 2yy''$$

سوال ۲: با توجه به عامل انتگرال‌ساز $\mu = \frac{5}{xy^2}$ مقدار A را یافته و معادله را حل کنید:

$$(Axy - 2y^2) dx + (3xy - y^2) dy = 0$$

سوال ۳: مقادیر α و β را بیابید به نحوی که $\mu = x^\alpha x^\beta$ عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل زیر باشد، سپس معادله را حل کنید:

$$y(4x + 3y^3) dx + x(2x + 5y^3) dy$$

سوال ۴: جواب عمومی معادله زیر را بنویسید (این معادله با عامل انتگرال‌سازی که تنها تابعی از y است کامل می‌شود):

$$y \cos(x) dx + (y + 2) \sin x dy = 0$$

سوال ۵: جواب عمومی معادله زیر را بنویسید (توجه کنید که $y_1 = x$ یک جواب معادله زیر است):

$$(1 + x^2) y'' - 2x y' + 2y = 0$$

سوال ۶: جواب کامل معادله خطی مرتبه دوم زیر را بدست آورید:

$$y'' - 2y' + y = e^x + 5 \cos(x) + 7x^2 + 2$$

سوال ۷: بنا بر قضیه وجود و یگانگی میدانیم، برای هر عدد حقیقی a ، مساله مقدار اولیه زیر دارای جواب یگانه ای است که در سرتاسر \mathbb{R} تعریف شده است. به ازای چه مقادیری از a ، این جواب یگانه تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است؟

$$y' + y = \sin t$$

$$y(0) = a$$

سوال ۸: معادله دیفرانسیلی از مرتبه سوم بنویسید که جواب عمومی آن، خانواده توابع زیر باشد:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$$

سوال ۹: اگر x یک جواب قسمت همگن معادله زیر باشد، آنگاه پاسخ کامل معادله را بدست آورید:

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2 e^{-x}$$

سوال ۱۰: حاصل $\varphi(t)$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس بیابید:

$$\varphi''(t) + \varphi'(t) = \cos(t) + 2 \int_0^t \sin(t - \tau) \varphi'(\tau) . d\tau$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$$

سوال ۱۱: جواب مساله مقدار اولیه زیر را بدست آورید:

$$y'' + y = u_1(t) + t^3\delta(t - 2)$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 2$$

سوال ۱۲: معادله انتگرال زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$f(x) = x^2 + \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt$$

سوال ۱۳: دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$y'_2 = y_1 + 4y_2 + x$$

$$3y'_1 + 3y_1 + 2y_2 + e^x$$

سوال ۱۴: لاپلاس معکوسهای زیر را حساب کنید:

$$L^{-1}\left(\ln\left(\frac{s^2 + 1}{s(s + 1)}\right)\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

سوال ۱۵: لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید:

$$f(x) = e^{-2x} \int_0^x (t - \cosh(3t)) dt$$

$$g(x) = \int_0^\infty \int_0^x t e^{2x-t} \sin(3t) dt dx$$

سوال ۱۶: دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$x' = 2x$$

$$y' = -x + 2y + e^{2t}$$

$$z' = y + 2z$$

الف) دستگاه را به شکل ماتریسی، یعنی بصورت $X' = AX + f(t)$ بازنویسی کنید.

ب) e^{At} را محاسبه کنید.

ج) جواب یگانه دستگاه فوق را به ازای $x(0) = 0; y(0) = 0; z(0) = 1$ بدست آورید.

سوال ۱۷: دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید (برای حل از تقریب خطی استفاده کنید):

$$x' = -2x + 2x^2$$

$$y' = -3x + y + 3x^2$$

الف) نقاط بحرانی دستگاه را بدست آورید.

ب) وضعیت هر نقطه بحرانی را، از نظر پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری، بررسی کنید و نمای فاز دستگاه را در همسایگی هر نقطه بحرانی رسم کنید.