به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

پاسخ سوالات میان ترم درس محاسبات عددی **جمع نمرات : 25 نمره**

پاییز ۹۵

---

۱. (۵ نمره)

```
x=linspace (0,2*pi,100);
y= sin(x);
z= exp (-x);
y=z.*y;
hold on
plot (x,y);
plot(2*pi+x,exp(-2*pi)*y);
hold off
```

یا

```
x=linspace (0,2*pi,100);
y=sin (x);
z=exp (-x);
```

```
x=[x  x+2*pi];

y1=z.* y;

y2=exp(-2*pi)*y1;

y=[y1   y2];

plot (x,y);
```

۲. **(بخش های الف تا ث هر یک ۱ نمره)**

(الف) $0.1\times 2^{-10} = 2^{-11}$

(ب) $2^{1-6} = 2^{-5}$

(پ) $2\times 2^{5}\times 21+1$

(ت) $0.111111\times 2^{10} = (1-2^{-6})\times 2^{10} = \frac{63}{64}\times 2^{10} = 63\times 16 = 1008$

(ث)

$$2^{k} = 0.1\times 2^{k+1}$$

$$x = 0.111111\times 2^{k} = (1-2^{-6})\times 2^{k} = \frac{63}{64}\times 2^{k} = 63\times 2^{k-6}$$

۳. **(۵ نمره)** با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1)$$

$$f(a+h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) - \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2)$$

با استفاده از روابط فوق داریم :

$$\frac{\alpha_1 f(a)+\alpha_2 f(a+h)+\alpha_3 f(a-h)}{h}$$

$$=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)f(a)+(\alpha_2-\alpha_3)hf'(a)+(\alpha_2+\alpha_3)\frac{h^2}{2!}f''(a)}{h}$$

$$+(\alpha_2-\alpha_3)\frac{h^2}{6}\left(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right)$$

$$=f'(a)+(\alpha_2-\alpha_3)\frac{h^2}{6}\left(f'''(\xi)\right) \qquad \xi\in I[a-h,a+h]$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\&\alpha_2+\alpha_3=0 \qquad \Rightarrow \alpha_1=0,\alpha_2=\frac{1}{2},\alpha_3=-\frac{1}{2}\\&\alpha_2-\alpha_3=1\end{aligned}$$

٤. (٥ نمره)

الف) فرض کنیم که $z\in[x_i,x_{i+1}]$، بنا به قضیه‌ی خطای درونیابی داریم:

$$f(z)=L(z)+\frac{f^{(2)}(\eta)}{2}(z-x_i)(z-x_{i+1})$$

که در آن $\eta\in[x_i,x_{i+1}]$. فرض کنید که M_2 چنان موجود باشد که برای هر $\overline{x}\in[\alpha,\beta]$ داشته باشیم:

$$\left|f^{(2)}(\overline{x})\right|\le M_2.$$

به علاوه فرض کنیم $\overline{h}=\max_{i=1,\cdots,n-1}\left|x_{i+1}-x_i\right|$. در این‌صورت برای هر $z\in[\alpha,\beta]$ داریم:

$$\left|f(z)-L(z)\right|=\frac{1}{2}\left|f^{(2)}(\eta)\right|\left|(z-x_i)\right|\left|(z-x_{i+1})\right|\le\frac{M_2\overline{h}^2}{8}.$$

ب) با توجه به مبحث خطای درونیابی تکه‌ای خطی پیوسته داریم:

$$h=\frac{b-a}{n}$$

زیرا در صورت سؤال فرض شده که بازه به n فاصله مساوی تقسیم شود.

$$M_2=\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(2)}(x)\right|=\max_{x\in[0,2]}\left|-\sin(x)\right|=1$$

$$\frac{M_2h^2}{8}\le 10^{-3}\Rightarrow n\ge 1+\lfloor\sqrt{500}\rfloor\Rightarrow n\ge 23$$

5. (۵ نمره)

می دانیم:

$$f\left[x_1,x_2\right]=\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$$

برای $n=1$ داریم:

$$f\left[x_1,x_2\right]=\lim_{h\to 0} f\left[x_1,x_1+h\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h}=f'\left(x_1\right)$$

اکنون $k+1$ نقطه مجزای $x_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_{k+1}$ را در نظر بگیرید به طوری که برای $i=1,\ldots,k$ داریم:

$$.\overline{x}_{i+1}=x_1+ih$$

فرض کنید برای $n=k$ حکم درست باشد، یعنی،

$$f\left[x_1,x_2,\ldots,x_k\right]=\lim_{h\to 0} f\left[x_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_k\right]=\frac{f^{(k-1)}\left(x_1\right)}{(k-1)!}$$

برای $n=k+1$ می توان نوشت:

$$f\left[x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}\right]=\lim_{h\to 0} f\left[x_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_{k+1}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\lim_{h\to 0} f\left[\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_{k+1}\right]-\lim_{h\to 0} f\left[x_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_k\right]}{\overline{x}_{k+1}-x_1}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{f^{(k-1)}(\overline{x}_2)}{(k-1)!}-\frac{f^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!}}{kh}\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f^{(k-1)}\left(\overline{x}_2\right)-f^{(k-1)}\left(x_1\right)}{h}\right)=\frac{f^{(k)}\left(x_1\right)}{k!}$$