

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

جمع نمرات: ۱۰۰

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

مدت امتحان: ۳ ساعت

آذر ماه ۱۳۹۵

* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

۱- (۲۵ نمره)

(الف) (۱۰ نمره) تمام ریشه‌های معادله $z^2 + (z+2)^2 = 0$ را به دست آورید.

(ب) (۱۵ نمره) مشتق تابع تحلیلی $f(z) = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2} + i v(x, y)$ را به دست آورید.

۲- (۲۵ نمره)

(الف) (۱۵ نمره) تصویر ناحیه $\left\{ z \mid 0 < \|z\| < \infty, 0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2} \right\}$ را تحت نگاشت $f(z) = e^{iz}$ بیابید.

بررسی کنید که این نگاشت در چه نقاطی هم‌دیس و در چه نقاطی یک به یک است.

(ب) (۱۰ نمره) نگاشت موبیوس (هموگرافیک) $w = \frac{z-i}{z+i}$ را محاسبه کنید که نقاط $0, 1, i$ را به ترتیب به $0, \infty, 1$ تصویر کند.

۳- (۲۵ نمره)

(الف) یک سری لوران بنویسید که در ناحیه $2 < |z| < 4$ به تابع $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$ همگرا باشد.

(ب) یک سری لوران بنویسید که در ناحیه $|z| < 2$ به تابع $g(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ همگرا باشد.

۴- (۲۵ نمره)

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\bullet I_1 = \oint_{|z|=\frac{1}{r}} \frac{\sin^{-1} z}{1+z} dz$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}, \quad |a| < 1$$

$$\bullet I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-2x+2)}$$

با آرزوی موفقیت