۱ پاسخ سوال اول

با توجه به معادله‌ی داده شده داریم

$$p(x,y) = ax + by$$
$$q(x,y) = cx + dy$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$
$$b = c$$

و بدین ترتیب معادله‌ی دیفرانسیل داده شده خواهد بود
$(ax+by)dx + (bx+dy)dy = 0$

و حال برای حل این معادله به صورت زیر عمل می کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ax + by$$
$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + u(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + u'(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + dy$$
$$u'(y) = dy$$
$$u(y) = \frac{1}{2}dy^2$$
$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{a}{2}y^2$$
$$\frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{a}{2}y^2 = \alpha$$

پاسخ سوال دوم

الف. با توجه به معادله‌ی داده شده داریم

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = 1 - 9x^2y^2$$

با توجه به این که $\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}$ بنابراین معادله کامل نیست

ب. با ضرب عامل انتگرال‌ساز در معادله داریم

$$P(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta+1}$$
$$Q(x,y) = x^{\alpha+1}y^{\beta} - 3x^{\alpha+3}y^{\beta+2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial y} = (\alpha + ۱)x^{\alpha}y^{\beta} - ۳(\alpha + ۳)x^{\alpha+۲}y^{\beta+۲}\\
&\alpha + ۱ = \beta + ۱ \rightarrow \alpha = \beta\\
&\alpha + ۳ = ۰ \qquad \rightarrow \alpha = -۳
\end{aligned}
$$

ج. اکنون با توجه به عامل انتگرال‌ساز که محاسبه کردیم، فرم جدید معادله دیفرانسیل خواهد بود

$$\frac{۱}{x^۳y^۲}dx + \frac{۱ - ۳x^۲y^۲}{x^۲y^۳}dy = ۰$$

و بدین ترتیب خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{۱}{x^۳y^۲}\\
f(x,y) &= -\frac{۱}{۲}\frac{۱}{x^۲y^۲} + u(y)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{۱}{x^۲y^۳} + u'(y)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{۱}{x^۲y^۳} - \frac{۳}{y}\\
u'(y) &= -\frac{۳}{y}\\
u(y) &= -۳\ln(y)\\
f(x,y) &= -\frac{۱}{۲}\frac{۱}{x^۲y^۲} - ۳\ln(y)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{۱}{۲}\frac{۱}{x^۲y^۲} - ۳\ln(y) = C$$

۳ پاسخ سوال سوم

الف. با توجه به توابعی که در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کنند، ریشه‌های معادله‌ی مشخصه خواهند بود

$$
\begin{aligned}
r_۱ &= r_۲ = ۱\\
r_۳ &= -۱ + ۲i\\
r_۴ &= -۱ - ۲i
\end{aligned}
$$

بدین ترتیب چند جمله‌ای مشخصه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل به صورت زیرین می باشد.

$$
\begin{aligned}
(r-۱)^۲(r+۱-۲i)(r+۱+۲i) &= (r-۱)^۲((r+۱)^۲+۴))\\
&= (r-۱)^۲(r^۲+۲r+۵)\\
&= (r^۲-۲r+۱)(r^۲+۲r+۵)\\
&= r^۴+۲r^۲-۸r+۵
\end{aligned}
$$

و در نهایت با توجه به این که ضرایب چند جمله‌ای مشخصه با ضرایب معادله‌ی دیفرانسیل یکسان است خواهیم داشت

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} - 8y^{(1)} + 5y^{(0)} = 0$$

ب. برای به دست آوردن جواب خصوصی از روش ضرایب نامعین، با توجه به این که e^t دوبار جواب همگن بوده است، تابع زیر را در نظر می گیریم و مشتقات آن را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)}(t) &= kt^2 e^t \\
\varphi^{(1)}(t) &= (kt^2 + 2kt)e^t \\
\varphi^{(2)}(t) &= (kt^2 + 4kt + 2k)e^t \\
\varphi^{(3)}(t) &= (kt^2 + 6kt + 6k)e^t \\
\varphi^{(4)}(t) &= (kt^2 + 8kt + 12k)e^t
\end{aligned}$$

و بدین ترتیب با جایگذاری در معادله‌ی دیفرانسیل داریم

$$\begin{aligned}
\varphi^{(4)} + 2\varphi^{(2)}(t) - 8\varphi^{(1)}(t) + 5\varphi^{(0)}(t) &= 0 \\
kt^2 + 8kt + 12k + 2kt^2 + 8kt + 4k - 8kt^2 - 16kt + 5kt^2)e^t &= e^t \\
16k &= 1 \\
k &= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

(

۴ پاسخ سوال چهارم

الف. برای این که $y_1(t) = t$ جواب معادله‌ی دیفرانسیل باشد، با جایگذاری در معادله‌ی دیفرانسیل خواهیم داشت

$$\frac{1}{t^2} + tr(t) = 0, \quad (*) \text{ رابطه‌ی}$$

برای محاسبه‌ی حل همگن دیگر با استفاده از روش کاهش مرتبه، حل دیگری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= tu(t) \\
y_2'(t) &= tu'(t) + u(t) \\
y_2''(t) &= tu''(t) + 2u'(t)
\end{aligned}$$

و با جایگذاری در در معادله‌ی دیفرانسیل خواهیم داشت

$$tu''(t) + 2u'(t) + \frac{1}{t^2}(tu'(t) + u(t)) + tr(t)u(t) = 0$$

$$tu''(t) + 2u'(t) + \frac{1}{t}u'(t) + (\frac{1}{t^2} + tr(t))u(t) = 0$$

$$t^2u''(t) + 2tu'(t) + u'(t) = 0, \quad (*) \text{ رابطه‌ی }$$

$$u'' = p'$$

$$p'(t) + \frac{2t+1}{t^2}p(t) = 0$$

$$p(t) = C\exp - \left(\int \frac{2t+1}{t^2}dt\right)$$

$$p(t) = C\exp - \left(2\ln t + \frac{1}{t}\right)$$

و در نهایت می‌توان نوشت

$$p(t) = C\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$$

$$u(t) = -Ce^{\frac{1}{t}}$$

$$y_2(t) = te^{\frac{1}{t}}$$

ب. برای این که نشان دهیم دو حل به دست آمده، مستقل خطی هستند کافی است که نشان دهیم رونسکین این دو تابع در یک نقطه‌ی دلخواه مخالف صفر است.

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ te^{\frac{1}{t}} & e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} \end{vmatrix} = te^{\frac{1}{t}}$$

همانطور که مشاهده می‌شود رونسکین در بازه‌ی $(0, +\infty)$ همواره مثبت و مخالف صفر است و بنابراین دو حل به دست آمده در این بازه مستقل خطی هستند (۱ نمره).

۵ پاسخ سوال پنجم

الف. با توجه به این که $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل هستند داریم

$$\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1 = g$$
$$\varphi_2'' + p\varphi_2' + q\varphi_2 = g$$
$$\varphi_3'' + p\varphi_3' + q\varphi_3 = g$$

پس با توجه به خطی بودن معادلات می‌توان نتیجه گرفت که

$$(\varphi_3'' - \varphi_1'') + p(\varphi_3' - \varphi_1') + q(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$$
$$(\varphi_2'' - \varphi_1'') + p(\varphi_2' - \varphi_1') + q(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

بدین ترتیب $\varphi_1 - \varphi_3$ و $\varphi_1 - \varphi_2$ جواب‌های همگن معادله‌ی دیفرانسیل اند. بدین ترتیب خواهیم داشت

$$y_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = t - 1$$
$$y_2(t) = \varphi_3(t) - \varphi_1(t) = \ln t - 1$$

و برای محاسبه‌ی رونسکین خواهیم داشت

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ \ln t - 1 & \frac{1}{t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t} - \ln t + 2$$

همانطور که مشاهده می‌شود رونسکین در بازه‌ی $[10, +\infty)$ همواره منفی و مخالف صفر است و بنابراین دو حل به دست آمده در این بازه مستقل خطی هستند (۱ نمره).

ب. برا ی محاسبه‌ی جواب عمومی کافی است که جواب همگن را با یک جواب خصوصی جمع کنیم و بدین ترتیب خواهیم داشت

$$y(t) = C_1(t-1) + C_2(\ln t - 1) + 1$$

ج. برای انتخاب یک جواب خصوصی با ویژگی یاد شده، می‌توان حالت زیر را در نظر گرفت

$$\begin{aligned} C_1 &= -1 \\ C_2 &= 0 \\ \phi_4(t) &= -t + 2 \\ \lim_{t\to+\infty} \phi_4(t) &= \lim_{t\to+\infty} -t + 2 = -\infty \end{aligned}$$

انتخاب های دیگری نیز برای ثوابت C_2, C_1 امکان پذیر است.

۶ پاسخ سوال ششم

با توجه به این که $y(0) = -1$ است و تابع در $t = 0$ پیوسته است، باید بازه‌ای حول صفر نظیر $[0, \delta)$ موجود باشد که در آن $y < 0$ است. در این بازه می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل را بر $y^{\frac{4}{5}}$ تقسیم کرد (۲ نمره). بدین ترتیب خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y^{\frac{4}{5}} \\ \frac{dy}{y^{\frac{4}{5}}} &= dt \\ 5y^{\frac{1}{5}}(t) &= t + C \\ -5 &= C \\ y(t) &= \left(\frac{t-5}{5}\right)^5 \end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق $\delta = 5$ می‌تواند انتخاب شود. بدین ترتیب برای تمامی جواب‌های معادله خواهیم داشت

$$y(t) = \left(\frac{t-5}{5}\right)^5, \quad 0 \le t < 5$$

از طرفی با توجه به معادله‌ی دیفرانسیل، y تابعی همواره صعودی خواهد بود چرا که $y^{\frac{4}{5}} \ge 0$ است . همچنین به دلیل پیوستگی تابع در $t = 5$ می‌توان نتیجه گرفت که $y(5) = 0$ است . حال دو حالت را می‌توان در نظر گرفت

۱ـ اگر نقطه‌ای نظیر $t_0 > 5$ موجود نباشد که $y(t_0) \neq 0$ آن‌گاه به سادگی می‌توان نتیجه

گرفت که

$$y(t)=\begin{cases}\left(\frac{t-۵}{۵}\right)^{۵} & ۰\leq t<۵\\ ۰ & ۵\leq t\end{cases}$$

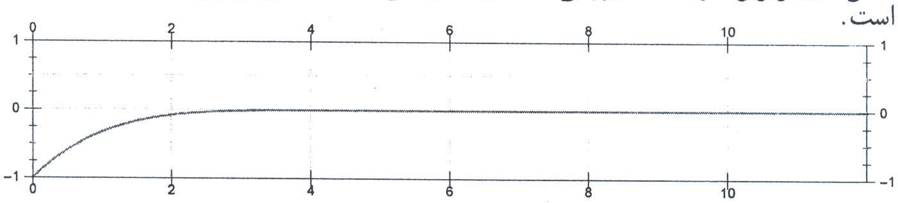
۲ـ اگر نقطه‌ای مانند $t_۰>۵$ موجود باشد که $y(t_۰)\neq ۰$، طبق صعودی بودن y از معادله‌ی دیفرانسیل و این که $y(۵)=۰$ است، باید $y(t_۰)>۰$ باشد . بدین ترتیب به دلیل پیوستگی y در $t_۰$، بازه‌ای نظیر $[a\ b]$ موجود است که بر روی آن $y(t)\neq ۰$ است و بنابراین در این بازه تقسیم بر $y^{\frac{۴}{۵}}$ مجاز است. واضح است که b را می توان $+\infty$ انتخاب کرد و a می‌تواند هر مقدار بزرگتر مساوی ۵ باشد که تابع برای آخرین بار در آن جا صفر شده است. بدین ترتیب با تکرار انتگرال گیری بالا و توجه به این که $y(a)=۰$ است خواهیم داشت

$$y(t)=\left(\frac{t-a}{۵}\right)^{۵},\quad a\leq t$$

و در نهایت برای هر $a\geq ۵$، جواب خواهد بود

$$y(t)=\begin{cases}\left(\frac{t-۵}{۵}\right)^{۵} & ۰\leq t<۵\\ ۰ & ۵\leq t<a\\ \left(\frac{t-a}{۵}\right)^{۵} & a\leq t\end{cases}$$

شکل‌های زیرین دو حالت بررسی شده را نشان می‌دهند. شکل زیرین مطابق با حالت ۱ است.



شکل بعدی نیز مطابق با حالت ۲ برای $a=۶$ رسم شده است.