سؤال ۱

برای اینکه نشان دهیم $\dot{B}(t_0) \parallel N(t_0)$ کافی است نشان دهیم این بردار بر هر دو بردار $B(t_0)$ و $T(t_0)$ عمود است.

۱

برای هر t داریم $B(t)\cdot B(t)=1$ بنابراین با مشتق گیری نسبت به t خواهیم داشت:

$$0=\dot{B}(t)\cdot B(t)+B(t)\cdot \dot{B}(t)=2\,\dot{B}(t)\cdot B(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{B}(t)\perp B(t)$$ برای هر t

۴

همچنین برای هر t داریم $0=B(t)\cdot T(t)$ بنابراین با مشتق گیری نسبت به t:

$$0=\dot{B}(t)\cdot T(t)+B(t)\cdot \dot{T}(t)$$

۴

حال طبق فرض سؤال $\dot{T}(t_0)\parallel N(t_0)$ بنابراین $B(t_0)\cdot \dot{T}(t_0)=0$ و داریم

۱

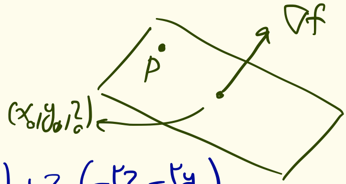
$$\dot{B}(t_0)\cdot T(t_0)=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{B}(t_0)\perp T(t_0)$$

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 + xy - 2yz$$

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 + y_0 \\ 6y_0 + x_0 - 2z_0 \\ -2z_0 - 2y_0 \end{bmatrix}$$

۳

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ عمود بر سطح تراز تابع f در نقطه (x_0,y_0,z_0) است. بنابراین اگر $f(x_0,y_0,z_0)=1$
این بردار عمود بر رویه مورد نظر در این نقطه است و معادله صفحه مماس برابر است با



$$\nabla f \cdot P = \nabla f \cdot (x_0,y_0,z_0)$$

۲

$$= x_0(2x_0+y_0) + y_0(6y_0+x_0-2z_0) + z_0(-2z_0-2y_0)$$

برای این معادله یا شبیه آن

$$= 2f(x_0,y_0,z_0) = 2$$

پس معادله صفحه مورد نظر به صورت روبرو است:

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot P = 2$$

اگر صفحه بالا بخواهد از نقطه A بگذرد باید داشته باشیم

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot A = 2$$

۲

$$\Longleftrightarrow a(2x_0+y_0) + b(6y_0+x_0-2z_0) + c(-2z_0-2y_0) = 2$$

۳

$$\Longleftrightarrow (2a+b)x_0 + (a+6b-2c)y_0 + (-2b-2c)z_0 = 2$$

بنابراین (x_0,y_0,z_0) هایی که صفحه مماس بر رویه در آن‌ها از A می‌گذرد روی صفحه بالا قرار دارند

سؤال ۳.

با توجه به قاعده‌ی زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \qquad 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \qquad 1$$

$$z_s=z_x\frac{\partial x}{\partial s}+z_y\frac{\partial y}{\partial s}=te^s z_y \qquad 1$$

$$z_t=z_x\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+z_y\frac{\partial y}{\partial t}=e^t z_x+e^s z_y \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=\underline{\frac{\partial}{\partial s}\left(te^s z_y\right)=te^s z_y+te^s\frac{\partial (z_y)}{\partial s}} \qquad 1$$

$$=te^s z_y+te^s\left(te^s (z_y)_y\right)=\underline{te^s\left(z_y+te^s z_{yy}\right)} \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=\underline{\frac{\partial}{\partial t}\left(te^s z_y\right)=e^s z_y+te^s\frac{\partial}{\partial t}(z_y)} \qquad 1$$

$$=\underline{e^s z_y+te^s\left(e^t z_{xy}+e^s z_{yy}\right)} \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(e^t z_x+e^s z_y\right)=\underline{e^t z_x+e^t\frac{\partial}{\partial t}(z_x)+e^s\frac{\partial}{\partial t}(z_y)} \qquad 1$$

$$=\underline{e^t z_x+e^t\left(e^t z_{xx}+e^s z_{xy}\right)+e^s\left(e^t z_{xy}+e^s z_{yy}\right)} \qquad 1$$

سوال ساده

سوال ۴.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\nabla f = 3\begin{bmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{bmatrix}$$ ۳

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x,y \geq 0 \\ x^4 = x \\ y^4 = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ۲

تنها نقطه بحرانی در ناحیه نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

ماتریس مشتق دوم در این نقطه برابر است با

$$H = 3\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$ ۲

این ماتریس مثبت معین است زیرا $2>0$ و $\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0$ بنابراین نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ کمینه موضعی است. ۲ ۱

اگر نشان دهند فرم درجه ۲ مشتق مرتبه دوم نیز همیشه مثبت است و در نتیجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ کمینه موضعی است باز ۵ نمره را می‌گیرند

سوال ۵:

در روش ضرایب لاگرانژ اگر $p=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ نقطه‌ای باشد که در شرایط مشخص شده صدق کند و تابع f در آن بیشینه (یا کمینه) شود و $\nabla g_1(p)$ و $\nabla g_2(p)$ مستقل خطی باشند آنگاه p در روابط زیر صدق می‌کند

۳

$$\begin{cases}\nabla f(p)=\lambda_1\nabla g(p_1)+\lambda_2\nabla g(p_2)\\ g_1(p)=0\\ g_2(p)=0\end{cases}$$

نقاطی را که ∇g_1 و ∇g_2 در آنها مستقل خطی نیستند باید جداگانه بررسی شوند:

$$\begin{cases}g_1(p)=0\\ g_2(p)=0\\ \nabla g_1 \parallel \nabla g_2\end{cases}$$

۲

نقاط بدست آمده شامل نقاط کمینه و بیشینه هستند (درصورتی که تابع دارای چنین نقاطی باشد)

در مثال ما:

۱

$$\nabla f=2\begin{bmatrix}x\\y-b\\-cz\end{bmatrix}\qquad \nabla g_1=2\begin{bmatrix}x-z\\y\\-x\end{bmatrix},\quad \nabla g_2=2\begin{bmatrix}x+(z-2)\\y\\x\end{bmatrix}$$

بنابراین معادلاتی که باید بررسی شوند از قرار زیراند

۱

$$\begin{cases}x^2+y^2-2xz=0\\ x^2+y^2+2x(z-2)=0\\ \begin{bmatrix}x-z\\y\\-x\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}x+(z-2)\\y\\x\end{bmatrix}\end{cases}$$

و

۱

$$\begin{cases}x^2+y^2-2xz=0\\ x^2+y^2+2x(z-2)=0\\ \begin{bmatrix}x\\y-b\\-cz\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}x-z\\y\\-x\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}x+(z-2)\\y\\x\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(p)=0 \\ g_2(p)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 2xz = 2x(2-z)$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z \text{ دلخواه} & \text{حالت ①} \\ x\neq 0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow x^2+y^2-2x=0 & \text{حالت ②} \end{cases}$$

بقیه‌ی اثبات در صورت دیدن ① !

در همه‌ی نقاط حالت ① داریم $\nabla g_1 \sim \nabla g_2 \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بنابراین این نقطه‌ها باید در بررسی تکینی ظاهر شوند. در ضمن چون برای نقاط حالت ② داریم $x\neq 0$, $z=1$ بنابراین

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ -x \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\nabla g_1 \sim \nabla g_2 \Rightarrow y=-y \text{ , } x-1 = -(x-1) \Rightarrow y=0, x=1 \quad \times$$

(در رابطه صدق نمی‌کند)

بنابراین هیچ یک از نقاط حالت ② مشکل ندارند:

برای نقاط حالت ② داریم:

$x\neq 0$

$z=1$

$x^2+y^2-2x=0$

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 : \quad \begin{bmatrix} x \\ y-b \\ -cz \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ -x \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = (\lambda_1+\lambda_2)(x-1) \\ y-b = (\lambda_1+\lambda_2)\, y \\ -c = (\lambda_2-\lambda_1)\, x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \Rightarrow x=0 \quad \times \\ xy = (x-1)(y-b) \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y-b) = -bx$$

$$\Rightarrow y = b(1-x)$$

$$x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow x^2+b^2(1-x)^2-2x=0 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{1+b^2} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \\ -b/\sqrt{1+b^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(p) = x^2 + (y-b)^2 - cz^2 = x^2(1+b^2) - c$$

واضح است که f در نقطه‌ی P_2 بیشتر است و مقدار f در این نقطه برابر است با

$$f(P_2) = \left(\sqrt{1+b^2} + 1\right)^2 - c \;\overset{\text{با مقادیر}}{\underset{\text{داده شده}}{=}}\; \frac{5}{4}$$

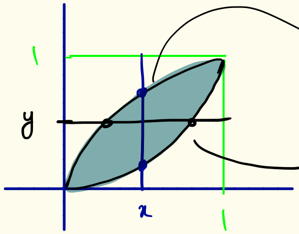
اما نقاط حالت (1) جداگانه باید بررسی شوند $x=y=0$ و z دلخواه

$$f(x,y,z) = b^2 - cz^2$$

بیشترین مقدار برای نقطه‌ی $z=0$ است که برابر است با $f(0,0,0) = b^2 = \frac{5}{4}$.

بنابراین f در دو نقطه بیشترین مقدار خود را که $\frac{5}{4}$ است می‌گیرد: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\sqrt{5}/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

سؤال ۶



$y = x^{1/2}$ یا $x = y^2$

$y = x^{3/2}$ یا $x = y^{2/3}$

۲

$$D = \{(x,y) : \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ y^2 \leq x \leq y^{2/3} \}$$

$$= \{(x,y) : \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^{3/2} \leq y \leq x^{1/2} \}$$

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=y^2}^{y^{2/3}} \frac{1}{y \ln x} \, dx \, dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^{3/2}}^{x^{1/2}} \frac{1}{y \ln x} \, dy \, dx$$

۲

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{1}{\ln x} \left[\ln y \right]_{x^{3/2}}^{x^{1/2}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) dx = -1$$

۱

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= u^v \end{aligned} \implies \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v u^{v-1} & u^v \ln u \end{bmatrix}$$

۲

$$D' = \{(u,v) : \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ x^{3/2} \leq y \leq x^{1/2} \}$$

۲

$$= \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1 \ , \ u^{3/2} \leq u^v \leq u^{1/2} \} = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1 \ , \ \frac{1}{2} \leq v \leq \frac{3}{2} \}$$

$$\int_D \frac{1}{y \ln x} \, dx \, dy = \int_{D'} \frac{1}{u^v \ln u} \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \, dv = \int_{D'} \underbrace{\frac{1}{u^v \ln u} \cdot \left| u^v \ln u \right|}_{-1} du \, dv$$

$$= \int_{D'} -1 \, du \, dv = -1$$

۱