به‌نام خدا

**دانشکدهٔ علوم ریاضی**

## حل مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

### ۹۵/۹/۱۸

**سؤال ۱:** چون $\sqrt{3} = z^{3} + \frac{1}{z^{3}}$، $\left(z^{3}\right)^{2} - \sqrt{3}\left(z^{3}\right) + 1 = 0$. در نتیجه، بنابر فرمول محاسبهٔ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم، $z^{3}$ با یکی از دو عدد زیر برابر خواهد بود:

$$\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i = \cos\frac{\pi}{6} \pm i \sin\frac{\pi}{6}.$$

لذا $z$ یکی از ۶ عدد زیر می‌باشد:

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right) \pm i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

امّا توجه می‌کنیم که این ۶ عدد به صورت

$$\cos\frac{\pi}{18} \pm i \sin\frac{\pi}{18},$$
$$\cos\frac{13\pi}{18} \pm i \sin\frac{13\pi}{18},$$
$$\cos\frac{25\pi}{18} \pm i \sin\frac{25\pi}{18}$$

می‌باشند که آرگومان‌های اصلی دو عدد اوّل برابر با $\pm\frac{\pi}{18}$، دو عدد دوم برابر با $\pm\frac{13\pi}{18}$ و دو عدد سوم برابر با $\mp\frac{11\pi}{18}$ است. با توجه به اینکه $\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg} z < \frac{2\pi}{3}$، به دست می‌آوریم

$$z = \cos\frac{11\pi}{18} + i \sin\frac{11\pi}{18}.$$

در نتیجه

$$z^{2} + \frac{1}{z^{2}} = \left(\cos\frac{22\pi}{18} + i \sin\frac{22\pi}{18}\right) + \left(\cos\frac{22\pi}{18} - i \sin\frac{22\pi}{18}\right)$$

$$= 2\cos\frac{22\pi}{18} = 2\cos\frac{11\pi}{9} = -2\cos\frac{2\pi}{9}. \blacksquare$$

**سؤال ۲:** ابتدا ادّعا می‌کنیم اگر $x_1$ و $x_2$ دو عدد حقیقی دلخواه باشند طوری که $x_1 < x_2$، آنگاه $f(x_1) \le f(x_2)$.
فرض کنید ادّعا درست نباشد و داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$. با این فرض، قرار می‌دهیم

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(f(x_1) - f(x_2)\right).$$

چون $f$ در $x_1$ و $x_2$ پیوسته است، پس اعداد حقیقی $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ وجود دارند طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$|x - x_1| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(x_1)| < \epsilon,$$
$$|x - x_2| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - f(x_2)| < \epsilon.$$

اکنون فرض می‌کنیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\}$. در این صورت، برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$|x - x_1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_1)| < \epsilon,$$
$$|x - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_2)| < \epsilon.$$

حال اعداد گویای $q_1$ و $q_2$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|q_1 - x_1| < \delta$ و $|q_2 - x_2| < \delta$. در نتیجه،

$$|f(q_1) - f(x_1)| < \epsilon,$$
$$|f(q_2) - f(x_2)| < \epsilon.$$

امّا اکنون به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} q_1 < x_1 + \delta &\le x_1 + \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right) \\ &= x_2 - \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right) \le x_2 - \delta < q_2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f(q_1) &> f(x_1) - \epsilon \\ &= f(x_1) - \frac{1}{2}\left(f(x_1) - f(x_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x_1) - f(x_2)\right) + f(x_2) \\ &= \epsilon + f(x_2) > f(q_2). \end{aligned}$$

یعنی اینکه، $q_1 < q_2$ و $f(q_1) > f(q_2)$ که تناقض است. پس لزوماً $f(x_1) \le f(x_2)$ و درستی ادّعا ثابت می‌شود.
حال برای هر دو عدد حقیقی $x_3$ و $x_4$ که $x_3 < x_4$ می‌توانیم اعداد گویای $q_3$ و $q_4$ را چنان انتخاب کنیم که $x_3 < q_3 < q_4 < x_4$ و بنابر ادّعا و فرض به‌دست آوریم

$$f(x_3) \le f(q_3) < f(q_4) \le f(x_4),$$

یعنی اینکه، $f(x_3) < f(x_4)$. در نتیجه $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. $\blacksquare$

**سؤال ۳:** بنابر فرض، برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\left(f^{2}\right)'(x) = 2f(x)f'(x) = 0.$$

در نتیجه $f^{2}$ روی $\mathbb{R}$ تابعی ثابت است. مثلاً فرض می‌کنیم برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f^{2}(x) = c$ که در آن $c \ge 0$.
اگر $c = 0$، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f^{2}(x) = 0$ که ایجاب می‌کند $f(x) = 0$. پس در این حالت، $f$ تابع ثابت صفر است.
اگر $c > 0$، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f^{2}(x) = c$ که ایجاب می‌کند $f(x) = \pm\sqrt{c}$. اگر برای بعضی از مقادیر $x$، مقدار $f$ برابر با $\sqrt{c}$ و برای بعضی مقادیر دیگر از $x$، مقدار $f$ برابر با $-\sqrt{c}$ باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، لااقل به ازای یک مقدار $x$، مقدار $f$ برابر با صفر می‌شود که چنین نیست. پس برای هر $x \in \mathbb{R}$، همواره $f(x) = \sqrt{c}$ یا همواره $f(x) = -\sqrt{c}$. پس در این حالت، $f$ تابع ثابت $\sqrt{c}$ یا تابع ثابت $-\sqrt{c}$ است. $\blacksquare$

**سؤال ۴:** (الف) بنابر فرض، $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ و در نتیجه اگر قرار دهیم $M=|f(0)|+1$، آنگاه اعداد حقیقی $N_1>0$ و $N_2>0$ وجود دارند طوری که برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$x>N_1 \Longrightarrow f(x)>M,$$

$$x<-N_2 \Longrightarrow f(x)>M.$$

پس با فرض $N=\max\{N_1,N_2\}$، برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$|x|>N \Longrightarrow f(x)>M.$$

تابع $f$ روی $[-N,N]$ پیوسته است، پس بنابر قضیهٔ ماکسیمم و مینیمم، $f$ روی $[-N,N]$ مینیمم مطلق دارد. فرض کنید $c\in[-N,N]$ نقطه‌ای باشد که $f$ در آن مینیمم مطلق را به خود می‌گیرد. توجه می‌کنیم که، در واقع، $f(c)$ مینیمم مطلق $f$ روی $\mathbb{R}$ است، زیرا برای هر $x\in\mathbb{R}$، اگر $x\in[-N,N]$، آنگاه

$$f(x)\ge f(c),$$

و اگر $x\notin[-N,N]$، آنگاه $|x|>N$ و لذا

$$f(x)>M=|f(0)|+1>f(0)\ge f(c). \blacksquare$$

(ب) بدون اینکه به کلّیت بحث خللی وارد شود می‌توانیم فرض کنیم $a_n>0$. چون $p(x)$ ریشهٔ حقیقی ندارد، پس $n$ زوج است. اکنون توجه می‌کنیم که $q(x)$ نیز یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n$ است و ضریب جملهٔ درجهٔ $n$ آن نیز $a_n$ است. پس مثبت بودن $a_n$ و زوج بودن $n$ ایجاب می‌کند که $\lim_{x\to\pm\infty} q(x)=+\infty$. در نتیجه، بنابر قسمت (الف)، $q(x)$ روی $\mathbb{R}$ مینیمم مطلق دارد. فرض می‌کنیم $q(c)$ این مینیمم مطلق باشد، در نتیجه $q'(c)=0$. امّا

$$\begin{aligned} q'(c) &= p'(c)+p''(c)+\cdots+p^{(n)}(c)+p^{(n+1)}(c)\\ &= p'(c)+p''(c)+\cdots+p^{(n)}(c)=q(c)-p(c), \end{aligned}$$

لذا، $q(c)=p(c)$. چون $p(x)$ ریشهٔ حقیقی ندارد، پس لزوماً $p(c)>0$ و در نتیجه $q(c)>0$. اکنون اینکه $q(c)$ مینیمم مطلق $q(x)$ است ایجاب می‌کند که $q(x)$ نیز ریشهٔ حقیقی ندارد. $\blacksquare$

**سؤال ۵:** با توجه به شکل $s+x$ برابر است با نصف اندازهٔ قطر مقوای به شکل مربع که طول ضلع آن $\sqrt{10}$ متر است. در نتیجه

$$s+x=\frac{1}{2}\sqrt{10+10}=\sqrt{5}.$$

پس حجم هر کدام از هرم‌های قابل ساخت بر حسب $x$ برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(4x^2)\sqrt{s^2-x^2} &= \frac{4}{3}x^2\sqrt{\left(\sqrt{5}-x\right)^2-x^2}\\ &= \frac{4}{3}x^2\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}. \end{aligned}$$

در نتیجه مقادیر تابع $V:\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$V(x)=\frac{4}{3}x^2\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}$$

حجم هرم‌های مختلف را به دست می‌دهد. چون $V$ در بازهٔ $\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ تابعی پیوسته می‌باشد، لذا در این بازه ماکسیمم مطلق دارد. برای محاسبهٔ ماکسیمم مطلق تابع $V$ در بازهٔ مذکور، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{4}{3}\left(2x\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}+\frac{-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}}x^2\right)\\ &= \frac{4}{3}x\left(\frac{10-5\sqrt{5}\,x}{\sqrt{5-2\sqrt{5}\,x}}\right) \end{aligned}$$

در این بازه به ازای $x=0$ و $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$ صفر می‌شود. چون $V(0)=0$، $V\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0$ و $V\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{16}{15}$، لذا ماکسیمم مطلق تابع $V$ در بازهٔ $\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ برابر است با $\frac{16}{15}$ که همان بیشترین حجمی است که یک هرم می‌تواند در بین هرم‌های ساخته شده داشته باشد. $\blacksquare$

**سؤال ۶:** تابع $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\ln(1+x)$ را در نظر می‌گیریم و چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ $n$ تابع $f$ حول صفر را محاسبه می‌کنیم. توجه می‌کنیم که

$$f'(x)=\frac{0!}{(1+x)^1},$$

$$f''(x)=-\frac{1!}{(1+x)^2},$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^4},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

در نتیجه چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ $n$ تابع $f$ حول صفر برابر است با

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4\\ &\quad+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

اکنون بنابر قضیهٔ تیلور می‌توانیم بنویسیم

$$\ln(1/1)=f(0/1)=p_n(0/1)+e_{n+1}(0/1)$$

که در آن

$$e_{n+1}(0/1)=(-1)^n\frac{(0/1)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

و $0<c<0/1$. پس به ازای هر $n$، $p_n(0/1)$ مقدار تقریبی $\ln(1/1)$ را به دست می‌دهد و خطای محاسبه عبارت است از:

$$|e_{n+1}(0/1)|=\frac{(0/1)^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}<\frac{10^{-(n+1)}}{n+1}.$$

برای اینکه خطای محاسبه کمتر از $10^{-4}$ باشد، باید $n$ طوری باشد که

$$\frac{10^{-(n+1)}}{n+1}<10^{-4}.$$

برای این منظور کمترین مقدار $n$ برابر با ۳ است. پس، در واقع، $p_3(0/1)$ مقدار تقریبی $\ln(1/1)$ را با خطای کمتر از $10^{-4}$ به دست می‌دهد. این مقدار تقریبی برابر است با:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}=\frac{286}{3000}=\frac{143}{1500}\approx 0/0953. \blacksquare$$