



تاریخ: ۹۵/۹/۱۸

شماره:

پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۳۰)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۹۶-۹۵

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. فرض کنید z عددی مختلط باشد طوری که $\frac{2\pi}{3} < \text{Arg}z < \frac{\pi}{3}$. اگر $z^3 + \frac{1}{z^3} = \sqrt{3}$ ، مقدار $z^2 + \frac{1}{z^2}$ را محاسبه کنید.

سؤال ۲. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر دو عدد گویای داده شده q_1 و q_2 ، اگر $q_1 < q_2$ ، آنگاه $f(q_1) < f(q_2)$. نشان دهید f روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است.

سؤال ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد با این ویژگی که برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، لااقل یکی از دو مقدار $f(x)$ یا $f'(x)$ برابر با صفر است. نشان دهید f روی \mathbb{R} ثابت است.

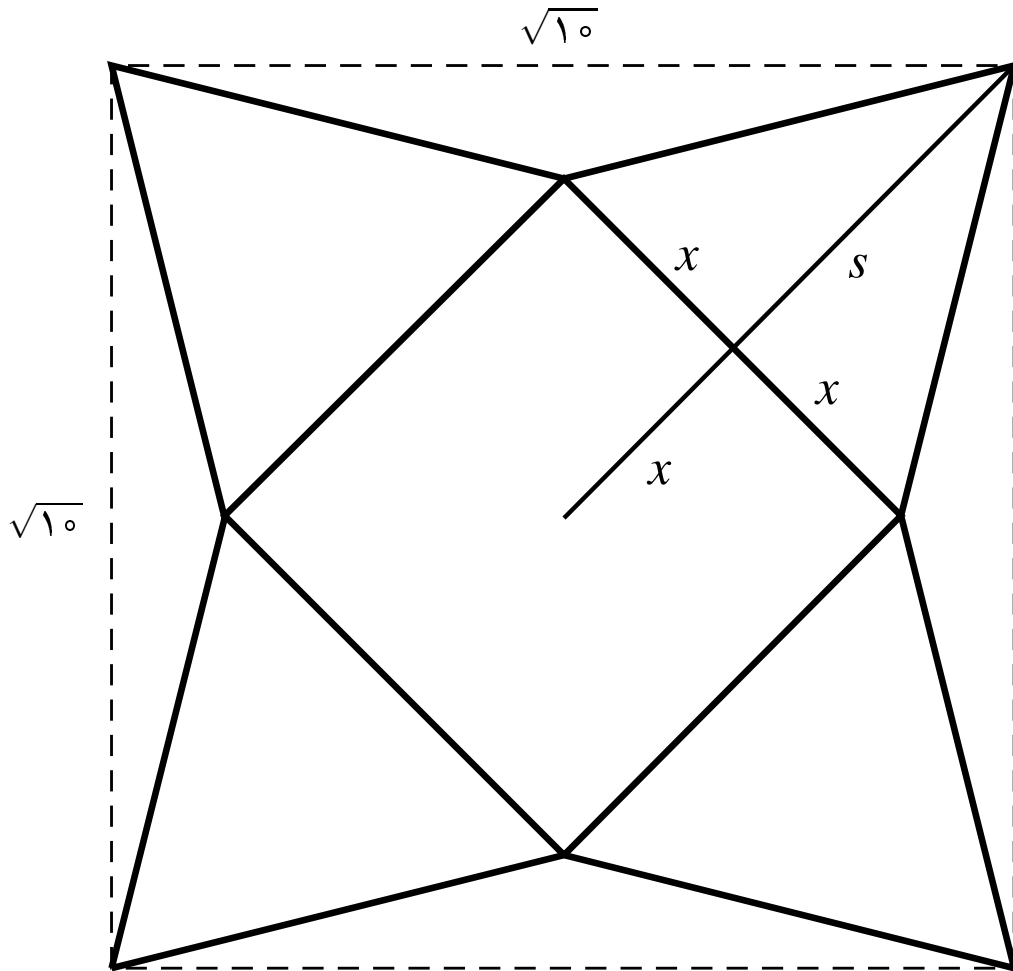
سؤال ۴. (الف) فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. نشان دهید f روی \mathbb{R} مینیمم مطلق دارد.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید اگر $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجه n و با ضرایب حقیقی باشد که ریشه حقیقی ندارد، آنگاه چندجمله‌ای

$$q(x) = p(x) + p'(x) + p''(x) + \dots + p^{(n)}(x)$$

نیز ریشه حقیقی ندارد.

سؤال ۵. یک قطعهٔ مقوایی به شکل مربع و به ضلع $\sqrt{10}$ متر را در نظر بگیرید (به مربع نقطه چین در شکل زیر نگاه کنید). با بریدن چهار مثلث مساوی از چهار طرف این مقوا مانند شکل، چهار مثلث متساوی الساقین و یک مربع به وجود می آید که با تا کردن مثلث‌های اخیر می‌توانیم یک هرم به قاعدهٔ مربع و وجوهی به شکل مثلث متساوی الساقین بسازیم. به ازای برش‌های مختلف اولیه، هرم‌های مختلف به دست می‌آید. در بین این هرم‌ها، بیشترین مقدار ممکن حجم چند متر مکعب است؟ (راهنمایی: حجم هرم ساخته شده $= \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعدهٔ هرم} \times \text{ارتفاع هرم}$.)



سؤال ۶. مقدار تقریبی $\ln(1/1)$ را طوری محاسبه کنید که مقدار خطای محاسبه از 10^{-4} کمتر باشد.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره، سؤال ۳: ۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۵+۱۵ نمره، سؤال ۵: ۱۵ نمره، سؤال ۶: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره