به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

معادلات دیفرانسیل — مدت امتحان: ۳ ساعت

پاسخنامه امتحان پایان ترم همه‌ی گروه ها — ۲ بهمن ۱۳۹۵

سوال ۱)

$$
\begin{aligned}
& x^{۲}y'' + xy' + (x^{۲} - ۴)y = ۰ \\
\iff \quad & y'' + \frac{۱}{x}y' + (-\frac{۹}{۴}\frac{۱}{x^{۲}} + ۱)y = ۰ \\
\iff \quad & r^{۲} + (۱ - ۱)r + (-۴) = ۰ \\
\iff \quad & r = \pm ۲ \\
& \Longrightarrow y_{۱}(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۲}
\end{aligned}
$$

بعد از جایگذاری در معادله داریم

$$
\begin{aligned}
& (۲^{۲} - ۴)a_{۲}x^{۲} + (۳^{۲} - ۴)a_{۱}x^{۳} + \sum_{n=۲}^{\infty}\Big(a_n[(n+۲)^{۲} - ۴] + a_{n-۲}\Big)x^{n+۲} = ۰ \\
\iff \quad & a_{۱} = ۰ \quad , \quad a_n = \frac{-a_{n-۲}}{(n+۲)^{۲} - ۴} = -a_{n-۲}\frac{۱}{n(n+۴)} \\
\Longrightarrow \quad & a_{۲k-۱} = ۰ \quad , \quad k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad & a_{۲k} = (-۱)^k \frac{۱}{۲k}\frac{۱}{۲(k-۱)}\cdots\frac{۱}{۲\times ۱}\frac{۱}{۲(k+۲)}\frac{۱}{۲(k+۱)}\cdots\frac{۱}{۲\times(۱+۲)} \\
\Longrightarrow \quad & a_{۲k} = \frac{(-۱)^k}{۲^{۲k-۱}} \times \frac{۱}{k!} \times \frac{۱}{(k+۲)!} \\
\Longrightarrow \quad & y_{۱}(x) = a_{۰}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{۲^{۲n-۱}}\frac{x^{۲n+۲}}{n!(n+۲)!} \quad , \quad a_{۰} \neq ۰
\end{aligned}
$$

سوال ۲) الف)

$$
\mathcal{L}[\delta_{۱}'](s) = s\mathcal{L}[\delta_{۱}](s) - \delta_{۱}(۰) = se^{s}
$$

سوال ۲) ب)

$$y'(t) + \int_{۰}^{t} y(t-r)dr = \delta_{۱}'(t)\ ,\ y(۰) = ۰$$

$$\Longleftrightarrow \quad s\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[y](s)\mathcal{L}[۱](s) = \mathcal{L}[\delta_{۱}'](s)$$

$$\Longleftrightarrow \quad s\mathcal{L}[y](s) + \frac{۱}{s}\mathcal{L}[y](s) = se^{s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}[y](s) = \frac{s^{۲}}{s^{۲}+۱}e^{s} = e^{s}\frac{۱}{s^{۲}+۱} - e^{s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(t) = \int_{۰}^{t} \delta_{۱}(r)\sin(t-r)dr - \delta_{۱}(t) =$$

$$= u(t-۱)\sin(t-۱) - \delta_{۱}(t)$$

که در آن

$$u(t) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

اگر معادله انتگرالی را به بصورت

$$y'(t) + \int_{۰}^{t} y(\tau)(t-\tau)d\tau = \delta_{۱}'(t)$$

در نظر بگیریم، یعنی $t-\tau$ را آرگومان y در نظر نگیریم و آن را تابعی در نظر بگیریم که در y ضرب شده است و بعد از قضیه پیچش استفاده کنیم، در این حالت مانند راه صورت مورد نظر سوال داریم

$$s\mathcal{L}[y](s) + \frac{۱}{s^{۲}}\mathcal{L}[y](s) = se^{-s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{s^{۳}e^{-s}}{s^{۳}+۱} = e^{-s} - e^{-s}\frac{۱}{s^{۳}+۱}$$

$$\frac{۳}{s^{۳}+۱} = \frac{۱}{s+۱} + \frac{-s+۲}{s^{۲}-s+۱} = \frac{۱}{s+۱} + \frac{-s+۲}{\left(s-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}} =$$

$$= \frac{۱}{s+۱} - \frac{s-\frac{۱}{۲}}{\left(s-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}} + \frac{۳}{\sqrt{۳}}\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\left(s-\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}$$

پس داریم

$$\mathcal{L}[\frac{۱}{s^{۳}+۱}]^{-۱} = \frac{e^{-t}}{۳} - \frac{e^{t/۲}\cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)}{۳} + \frac{\sqrt{۳}e^{t/۲}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)}{۳}$$

پس در نهایت

$$y(t) = \delta_{۱}(t) - \frac{u_{۱}(t)}{۳}\left(e^{-(t-۱)} - e^{(t-۱)/۲}\cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}(t-۱)\right) + \sqrt{۳}e^{(t-۱)/۲}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}(t-۱)\right)\right)$$

البته گفتی است که اگر منظور طراح سوال ضرب این دو تابع بود، بهتر بود آن را به صورت

$$y'(t) + \int_۰^t (t-\tau)y(\tau)d\tau = \delta_۱'(t)$$

در صورت سوال مطرح میکرد.

سوال ۳)

الف)

$$x^۲y'' - ۲xy' + ۲y = ۰ \quad \Longrightarrow \quad r^۲ + (-۲-۱)r + ۲ = ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad r = ۲, ۱$$
$$y(x) = ax^۲ + bx \quad \Longrightarrow \quad y(۰) = ۰ \quad , \quad y'(۰) = b = ۱$$
$$y(x) = ax^۲ + x$$

توجه کنید که مساله در مبدا مرتبه دوم نیست و در نتیجه برای کل مساله لزومی ندارد قضیه وجود و یکتایی برقرار باشد که همانطور که مشاهده میشود، در اینجا با این شروط، مساله جواب یکتا ندارد.

ب)

$$\int_۰^\infty x^۲y''(x)e^{-sx}dx = \frac{d^۲}{ds^۲}\int_۰^\infty y''(x)e^{-sx}dx = \frac{d^۲}{ds^۲}[\mathcal{L}[y''](s)] = \frac{d^۲}{ds^۲}[s^۲\mathcal{L}[y](s) - ۱]$$
$$\int_۰^\infty -۲xy'(x)e^{-sx}dx = \frac{d}{ds}\int_۰^\infty ۲y'(x)e^{-sx}dx = ۲\frac{d}{ds}[\mathcal{L}[y'](s)] = ۲\frac{d}{ds}[s\mathcal{L}[y](s) - ۰]$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{d^۲}{ds^۲}[s^۲\mathcal{L}[y](s) - ۱] + ۲\frac{d}{ds}[s\mathcal{L}[y](s) - ۰] + ۲\mathcal{L}[y](s) = ۰$$
$$F(s) := \mathcal{L}[y](s) \quad \Longrightarrow \quad s^۲F''(s) + ۴sF'(s) + ۲F(s) + ۲sF'(s) + ۲F(s) + ۲F(s) = ۰$$
$$\Longrightarrow \quad s^۲F''(s) + ۶sF'(s) + ۶F(s) = ۰$$

پ)

$$r^۲ + (۶-۱)r + ۶ = ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad r = -۲ \, , \, -۳$$
$$F(s) = A\frac{۱}{s^۳} + B\frac{۱}{s^۲} \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \frac{A}{۲}x^۲ + Bx$$

حال با توجه شروط اولیه به روشنی مانند قسمت الف داریم

$$y(x) = \frac{A}{۲}x^۲ + x =: ax^۲ + x$$

سوال ۴) برای محاسبه مقادیر ویژه داریم

$$
۰ = \det \begin{pmatrix} ۱-\lambda & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱-\lambda & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱-\lambda \end{pmatrix} = (۱-\lambda)\Big((۱-\lambda)^{۲}-۱\Big) - ۲\Big(۱-\lambda+۱\Big) =
$$

$$
= (۱-\lambda) - \lambda(۲-\lambda) - ۲(۲-\lambda) = (۲-\lambda)(\lambda^{۲} - ۲\lambda - ۲) =
$$

$$
= -(\lambda-۲)^{۲}(\lambda+۱)
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \lambda = ۲\,,\ ۲\,,\ -۱
$$

برای بردار ویژه متناظر با $\lambda = -۱$ داریم

$$
\begin{pmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad -y + ۲z = ۰ \quad , \quad ۲x + y + z = ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{۳}{۲}z - y + ۲z = ۰
$$

$$
z = ۲ \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۳ \\ ۴ \\ ۲ \end{pmatrix}
$$

برای بردار ویژه متناظر با $\lambda = ۲$ داریم

$$
\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad -z - y = ۰ \quad , \quad -x + y + z = ۰ \quad , \quad \Longleftrightarrow \quad x = ۰ \quad , \quad y = -z
$$

$$
z = ۱ \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}
$$

برای بردار ویژه تعمیم یافته متناظر برای مقدار ویژه $\lambda = ۲$ داریم

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad -x + y + z = ۰ \quad , \quad -y - z = ۱$$

$$y = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۳ & ۰ & -۱ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{۲t} & te^{۲t} \\ ۰ & ۰ & -e^{۲t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -۳ & ۰ & -۱ \\ ۴ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{۲t} + cte^{۲t} \\ ce^{۲t} \end{pmatrix}$$

$$= ae^{-t} \begin{pmatrix} -۳ \\ ۴ \\ ۲ \end{pmatrix} + (be^{۲t} + cte^{۲t}) \begin{pmatrix} ۰ \\ -۱ \\ -۱ \end{pmatrix} + ce^{۲t} \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگر هم استفاده کرد.

سوال ۵)

الف)

$$۰ = \det \begin{pmatrix} ۱ - \lambda & -۲ \\ ۱ & ۴ - \lambda \end{pmatrix} = (۱ - \lambda)(۴ - \lambda) + ۲ = \lambda^۲ - ۵\lambda + ۶ = (\lambda - ۲)(\lambda - ۳)$$

$$\iff \quad \lambda = ۲ \, , \, ۳$$

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = ۲$ داریم

$$\begin{pmatrix} -۱ & -۲ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$y = ۱ \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = ۳$ داریم

$$\begin{pmatrix} -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$y = ۱ \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

پس برای جواب اساسی که ماتریسی است که در معادله دیفرانسیل صدق کند داریم

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{۲t} & ۰ \\ ۰ & e^{۳t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۲e^{۲t} & -e^{۳t} \\ e^{۲t} & e^{۳t} \end{pmatrix}$$

و اگر بخواهیم ماتریس اساسی را معرفی کنیم که در زمان صفر ماتریس همانی باشد داریم

$$\Psi(t) := e^{tA} = \Phi(t) \begin{pmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}^{-۱} =$$

$$= \begin{pmatrix} -۲e^{۲t} & -e^{۳t} \\ e^{۲t} & e^{۳t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲e^{۲t} - e^{۳t} & ۲e^{۲t} - ۲e^{۳t} \\ e^{۳t} - e^{۲t} & ۲e^{۳t} - e^{۲t} \end{pmatrix}$$

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگر هم استفاده کرد.

ب) با توجه به قضیه مربوط به حل معادلات ناهمگن خطی مرتبه اول داریم

$$X(t) = e^{tA}X(۰) + e^{tA}\int_۰^t e^{-sA} \begin{pmatrix} ۱ - e^{۲s} \\ -۲ + e^{۲s} \end{pmatrix} ds$$

$$\int_۰^t e^{-sA} \begin{pmatrix} ۱ - e^{۲s} \\ -۲ + e^{۲s} \end{pmatrix} ds = \int_۰^t \begin{pmatrix} ۲e^{-۲s} - e^{-۳s} & ۲e^{-۲s} - ۲e^{-۳s} \\ e^{-۳s} - e^{-۲s} & ۲e^{-۳s} - e^{-۲s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ - e^{۲s} \\ -۲ + e^{۲s} \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_۰^t \begin{pmatrix} ۳e^{-۳s} - ۲e^{-۲s} - e^{-s} \\ e^{-s} + e^{-۲s} - ۳e^{-۳s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -e^{-۳t} + e^{-۲t} + e^{-t} - ۱ \\ e^{-۳t} - e^{-t} - \frac{e^{-۲t}}{۲} + \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$$

همچنین داریم

$$\begin{pmatrix} ۲e^{۲t} - e^{۳t} & ۲e^{۲t} - ۲e^{۳t} \\ e^{۳t} - e^{۲t} & ۲e^{۳t} - e^{۲t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-۳t} + e^{-۲t} + e^{-t} - ۱ \\ e^{-۳t} - e^{-t} - \frac{e^{-۲t}}{۲} + \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} - e^{۲t} \end{pmatrix}$$

پس در نهایت داریم

$$X(t) = \begin{pmatrix} ۲e^{۲t} - e^{۳t} & ۲e^{۲t} - ۲e^{۳t} \\ e^{۳t} - e^{۲t} & ۲e^{۳t} - e^{۲t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{۲} - e^{۲t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴e^{۲t} - ۳e^{۳t} \\ ۳e^{۳t} - \frac{۵}{۲}e^{۲t} + \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$$

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگر مانند روش ضرایب نامعین و هر روش درست دیگری هم استفاده کرد.

سوال ۶)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

برای مقادیر ویژه داریم

$$\det \begin{pmatrix} ۱-\lambda & ۲ \\ -۲ & ۱-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^۲ - ۲\lambda + ۵ = ۰$$
$$\iff \quad \lambda = ۱ \pm \sqrt{۱-۵} = ۱ \pm ۲i$$

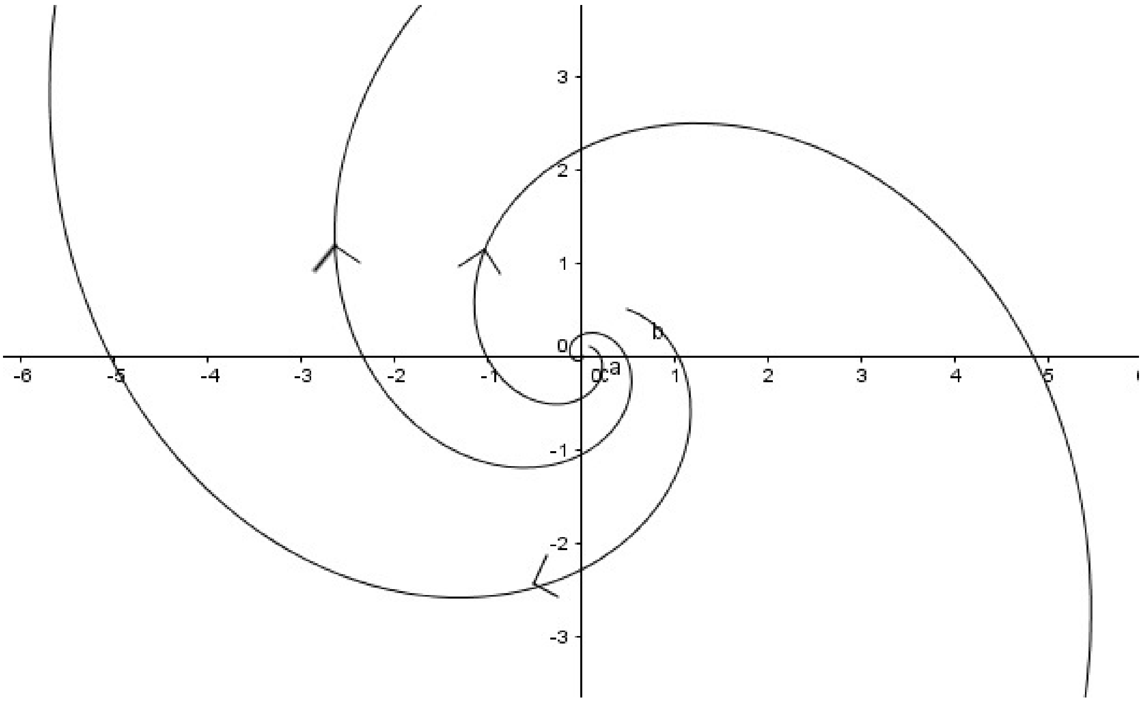
پس صفحه فاز مارپیچ خواهد بود، چون بخش موهومی و حقیقی هر دو ناصفر هستند.

$$r^۲(t) = x^۲(t) + y^۲(t) \quad \Longrightarrow \quad r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(x+۲y) + y(-۲x+y) = x^۲ + y^۲ = r^۲$$
$$\Longrightarrow \quad \dot{r} = r \quad \Longrightarrow \quad r(t) = e^t r(۰)$$
$$x(t) \neq ۰ \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad \Longrightarrow \quad (۱+\tan^۲\theta)\dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^۲}$$
$$\Longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{x^۲+y^۲}{x^۲} = \frac{(y-۲x)x - (x+۲y)y}{x^۲} = \frac{-۲(x^۲+y^۲)}{x^۲}$$
$$\Longrightarrow \quad \dot{\theta} = -۲ \quad \Longrightarrow \quad \theta(t) = -۲t + \theta(۰)$$

برای حالتی که $x(t) = ۰$ میتوان از $\cot\theta$ استفاده کرد و به روشنی نتیجه همان است که در بالا آمد. در نهایت با توجه به جواب های بدست آمده، r در حال افزایش در زمان مثبت است و θ در حال کاهش که این به معنی حرکت ساعتگرد در زمان مثبت است.

البته این تنها راه حل سوال نیست. میتوان از تبدیل لاپلاس یا روشهای حل دیگری که در برخی کلاسها مطرح شده مانند حل به روش تناظر اعداد مختلط و صفحه و حل معادله در دستگاه اعداد مختلط و همچنین حل کامل دستگاه به روشی که در فصل هفتم کتاب آمده است و یا هر روش درست دیگری استفاده کرد.

نمودار در صفحه بعد رسم شده است.



3
2
1
0
-1
-2
-3
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
a
b
c