

تسلیت به خانواده‌ی  
آتش نشان های عزیز

به نام خدا  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی



امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

جمع نمرات: ۱۲۰

۲ بهمن ۱۳۹۵

مدت امتحان: ۳ ساعت

\* استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

\* هر سوال ۲۰ نمره دارد.

۱- یک جواب سری (نا صفر) برای معادله دیفرانسیل بسل  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$  بدست آورید.

۲- (الف) تبدیل لاپلاس  $\delta_1'(t)$  را حساب کنید.  $\delta_1(t)$  تابع ضربه با ضابطه‌ی

$$\delta_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < t-1 < \varepsilon \\ 0 & |t-1| \geq \varepsilon \end{cases}$$

است.  $\varepsilon \rightarrow 0$

(ب) مساله‌ی  $\begin{cases} y' + \int_0^t y(t-\tau) d\tau = \delta_1'(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$  را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

۳- مساله‌ی کوشی اوپلر  $\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید.

(الف) این مساله را (با کمک گرفتن از معادله مشخصه متناظر) حل کنید.

(ب) نشان دهید با گرفتن تبدیل لاپلاس، معادله‌ی فوق به یک معادله کوشی اوپلر جدید تبدیل می‌شود. آن را بدست آورید.

(پ) با حل معادله‌ی بدست آمده در قسمت (ب) (با کمک گرفتن از معادله مشخصه متناظر)، جواب معادله‌ی اصلی را محاسبه کنید و نشان دهید نتیجه منطبق بر قسمت (الف) است.

۴- دستگاه خطی

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X(t),$$

را به طور کامل حل کنید.

۵- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

(الف) یک ماتریس اساسی برای مساله‌ی  $X' = AX$  بدست آورید.  
 (ب) مساله‌ی ناهمگن

$$X' = AX + \begin{bmatrix} 1 - e^{2t} \\ -2 + e^{2t} \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

را حل کنید.

۶- صفحه‌ی فاز دستگاه  $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} X$  را رسم کنید. بیان استدلال و جزئیات محاسبات لازم است.

### تبدیل‌های لاپلاس:

$f(t)$	$F(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\delta_{t_0}(t)$	$e^{-st_0}$
$-tf(t)$	$F'(s)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$

با آرزوی موفقیت