بسمه تعالی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۲، زمستان ۹۵ — زمان: ۳ ساعت، بارم هر قسمت ۱۰ نمره

۱. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ تابعی به مقدار لازم مشتق‌پذیر و $p_۰\in\mathbb{R}^۳$ نقطه‌ای مشخص است. همچنین:

$$(f, f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{xz},\ f_{yz}\ ,\ f_{zz})_{p_۰} = (۱, ۲, -۱, ۱, ۲, -۱, ۱, ۱)$$

الف. معادله صفحه مماس بر مجوعه $f=۱$ در نقطه $p_۰$ را بنویسید.

ب. نشان دهید $f=۱$ در همسایگی $p_۰$ به صورت نمودار تابعی مانند $z=h(x,y)$ است و z_y, z_{xy} را برای آن در نقطه متناظر با $p_۰$ حساب کنید.

ج. آیا بیشترین مقدار تابع $g(x,y,z)=x^۵+y^۳+z$ روی مجموعه $f=۱$ می‌تواند در نقطه $p_۰$ اتخاذ شود؟

۲. مساحت قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ را که درون استوانه $x^۲+y^۲=y$ قرار دارد پیدا کنید.

۳. میدان هموار زیر را روی صفحه منهای مبدأ در نظر بگیرید.

$$F(x,y)=f(x,y)(-y,\ x) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^۲-(۰,۰)$$

الف. نشان دهید F موضعاً پایدار است اگر وتنها اگر برای همه نقاط خارج مبدأ داشته باشیم:

$$x\,f_x(x,y)+y\,f_y(x,y)=-۲f(x,y)$$

ب. نشان دهید اگر تابع f همگن مرتبه -۲ باشد (یعنی برای همه نقاط خارج مبدأ و $t>۰$ داشته باشیم $f(tx,ty)=t^{-۲}f(x,y)$)آنگاه در رابطه بالا صدق می‌کند.(در واقع می‌توان نشان داد این دو معادل اند)

ج. اگر $f(x,y)=(x^۲+۴y^۲)^{-۱}$ انتگرال میدان F را روی دایره واحد و در جهت مثلثاتی محاسبه کنید.
(راهنمایی: ابتدا انتگرال این میدان را روی بیضی $x^۲+۴y^۲=۱$ محاسبه کنید.)

۴. فرض کنید $g(u,v)$ تابعی هموار باشد و قرار دهید

$$G(x,y,z)=(zg_v(zy,x)+x, z^۲g_u(zy,x)+x, g(zy,x)+zyg_u(zy,x))$$

الف. $\operatorname{curl} G$ را محاسبه کنید.

ب. اگر D ناحیه‌ای مسطح در $\mathbb{R}^۳$ با مساحت A و بردار نرمال N باشد $\int_{\partial D} G\bullet dr$ را حساب کنید.

ج. انتگرال $\int_C G\bullet dr$ را برای خم C با پرمایش زیر محاسبه کنید. (راهنمایی: G جمع یک میدان پایستار با یک میدان ساده است.)

$$\gamma(t)=(at,\cos t,\sin t) \qquad ۰\le t\le \frac{\pi}{۲}$$

۱. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ تابعی به مقدار لازم مشتق‌پذیر و $p_0 \in \mathbb{R}^3$ نقطه‌ای مشخص است. همچنین:

$$(f, f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}, f_{zz})_{p_0} = (1, 2, -1, 1, 2, -1, 1, 1)$$

الف. معادله صفحه مماس بر مجموعه $f = 1$ در نقطه p_0 را بنویسید.

بردار عمود بر صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی p_0 برابر است با

$$\nabla f(p_0) = \left(f_x(p_0), f_y(p_0), f_z(p_0)\right) = (2, -1, 1)$$ ۶

بنابراین معادله صفحه‌ی مماس گذرنده از p_0 برابر است با

$$\nabla f(p_0) \cdot (x, y, z) = \nabla f(p_0) \cdot p_0$$ ۴

یا به عبارت دیگر اگر $p_0 = (a, b, c)$

$$2x - y + z = 2a - b + c$$

ب. نشان دهید $f = 1$ در همسایگی p_0 به صورت نمودار تابعی مانند $z = h(x,y)$ است و z_y, z_{xy} را برای آن در نقطه متناظر با p_0 حساب کنید.

طبق قضیه تابع ضمنی اگر $f_z(p_0) \neq 0$ آنگاه سطح تراز گذرنده از نقطه‌ی p_0 تابع f در همسایگی آن نقطه به صورت نمودار تابع $z = h(x,y)$ است که با توجه به فرض $f_z(p_0) = 1 \neq 0$ این شرط برقرار است.

۳

$$f(x,y,z) = 1$$

$$\Rightarrow f_x(x,y,z) + z_x \cdot f_z(x,y,z) = 0 \quad (1) \quad \Rightarrow z_x = \frac{-f_x}{f_z}$$ ۱

$$\Rightarrow f_y(x,y,z) + z_y \cdot f_z(x,y,z) = 0 \quad (2) \quad \Rightarrow z_y = \frac{-f_y}{f_z}$$ ۱

$$(1) \Rightarrow \left(f_{xy}(x,y,z) + z_y f_{xz}(x,y,z)\right) + z_{xy} f_z(x,y,z) \quad (3)$$

$$+ z_x\left(f_{zy}(x,y,z) + z_y f_{zz}(x,y,z)\right) = 0$$ ۴

مقدار گذاری درست (۱)

اگر دو مؤلفه اول P_0 را q_0 بنامیم $(q_0=(x_0,y_0))$ آنگاه

$$(1) \Rightarrow f_x(P_0)+z_x(q_0)f_z(P_0)=0 \Rightarrow z_x(q_0)=-\frac{۲}{۱}=-۲$$

$$(۲) \Rightarrow \qquad z_y(q_0)=-\frac{-1}{1}=1$$

$$(۳) \Rightarrow f_{xy}(P_0)+z_y(q_0)f_{xz}(P_0)+z_{xy}(q_0)f_z(P_0)+z_x(q_0)f_{zy}(P_0)+z_x(q_0)z_y(q_0)f_{zz}(P_0)=0$$

$$\Rightarrow ۲+1\cdot(-1)+z_{xy}(q_0)\cdot 1+(-۲)\cdot 1+(-۲)\cdot 1\cdot 1=0$$

$$\Rightarrow z_{xy}(q_0)=۳$$

ج. آیا بیشترین مقدار تابع $g(x,y,z)=x^{۵}+y^{۳}+z$ روی مجموعه $f=۱$ می‌تواند در نقطه p_0 اتخاذ شود؟

برای بدست آوردن نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع g روی سطح تراز تابع f از قضیه ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. این قضیه می‌گوید اگر P_0 نقطه بیشینه یا کمینه g باشد و $\nabla f(P_0)\neq 0$ آنگاه حتماً باید $\nabla g(P_0)=\lambda\nabla f(P_0)$ (۳) شرط اول که واضح است برقرار است پس شرط دوم را بررسی می‌کنیم (۳)

$$\nabla g(P_0)=\lambda\nabla f(P_0) \Longleftrightarrow \boxed{\begin{bmatrix}5x^4\\3y^2\\1\end{bmatrix}_{P_0}=\lambda\begin{bmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{bmatrix}_{P_0}=\lambda\begin{bmatrix}۲\\-1\\1\end{bmatrix}} \quad (۲)$$

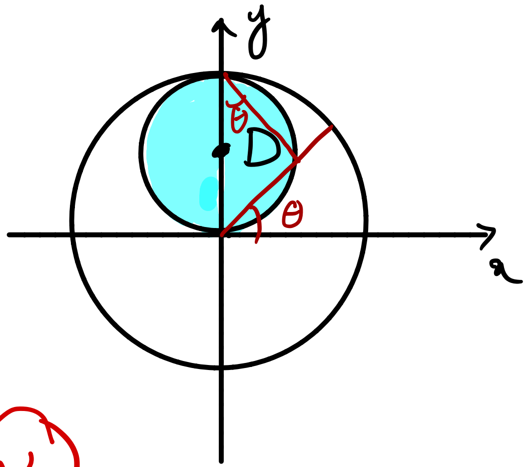
رابطه آخر می‌گوید $\lambda=1$ ولی در این صورت رابطه دوم نمی‌تواند برقرار باشد زیرا $3y^2\geq 0$.

(۲) بنابراین $\nabla g(P_0)\neq\lambda\nabla f(P_0)$ و در نتیجه P_0 نمی‌تواند بیشینه برای تابع g روی سطح تراز تابع f باشد.

۲. مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$ را که درون استوانه $x^2+y^2=y$ قرار دارد پیدا کنید.

استوانه‌ای با محور z که سطح مقطع آن با صفحه $z=0$ دایره به مرکز $(0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است :

$$x^2+y^2=y \longleftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$



به خاطر تقارن می‌توان تنها قسمتی از کره که بالای صفحه xy قرار دارد و درون استوانه است را حساب کرد.

این قسمت از کره را می‌توان به صورت زیر پارامتریش کرد

۲

$$\varphi(x,y)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right) \quad : \quad (x,y)\in D$$

$$\varphi_x=\left(1,0,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$$\varphi_y=\left(0,1,\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_x\times\varphi_y=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)$$

$$\Rightarrow |\varphi_x\times\varphi_y|=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$ ۲

مساحت کره بالای ناحیه D ۴ $= \int_D |\varphi_x\times\varphi_y|\,dxdy = \int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy$

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{\pi}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{r=0}^{\sin\theta}d\theta$$ ۲

$$=\int_{\theta=0}^{\pi}(1-\cos\theta)\,d\theta=\pi$$

بنابراین مساحت مورد نظر ۲ برابر مقدار بالا یعنی 2π است.

۳. میدان هموار زیر را روی صفحه منهای مبدأ در نظر بگیرید.

$$F(x,y) = f(x,y)(-y\,,\,x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^۲ - (۰,۰)$$

الف. نشان دهید F موضعاً پایدار است اگر وتنها اگر برای همه نقاط خارج مبدأ داشته باشیم:

$$x\,f_x(x,y) + y\,f_y(x,y) = -۲f(x,y)$$

$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$: $P(x,y) = -y f(x,y)$, $Q(x,y) = x f(x,y)$

موضعاً پایدار بودن معادل این است که ۵ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ در کل $\mathbb{R}^۲ - (۰,۰)$.

۲ $\frac{\partial Q}{\partial x} = f(x,y) + x f_x(x,y)$ $\quad$ $\frac{\partial P}{\partial y} = -f(x,y) - y f_y(x,y)$ ۲

بنابراین F موضعاً پایدار است اگر و تنها اگر ~~اگر~~ $x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = -۲f(x,y)$ ۱

ب. نشان دهید اگر تابع f همگن مرتبه ۲− باشد (یعنی برای همه نقاط خارج مبدأ و $t > ۰$ داشته باشیم $f(tx,ty) = t^{-۲}f(x,y)$)آنگاه در رابطه بالا صدق می‌کند.(در واقع می‌توان نشان داد این دو معادل اند)

فرض کنید $(a,b) \neq (۰,۰)$ دلخواه و ثابت است:

۳ $g(t) = f(ta,tb) = t^{-۲} f(a,b)$

$\Rightarrow g'(t) = -۲t^{-۳} f(a,b)$ ۱

$g'(t) = a f_x(ta,tb) + b f_y(ta,tb)$ ۴

$\Rightarrow g'(1) = -۲f(a,b) = a f_x(a,b) + b f_y(a,b)$ ۲

ج. اگر $f(x,y) = (x^{2} + 4y^{2})$ انتگرال میدان F را روی دایره واحد و در جهت مثلثاتی محاسبه کنید.

(راهنمایی: ابتدا انتگرال این میدان را روی بیضی $x^{2} + 4y^{2} = 1$ محاسبه کنید.)

$$f(ta,tb) = (t^2a^2 + 4t^2b^2)^{-1} = t^{-2}(a^2+4b^2)^{-1} = t^{-2}f(a,b)$$

بنابراین طبق قضیه‌ی قبل تابع f همگن از مرتبه‌ی -2 است و در نتیجه میدان F روی $\mathbb{R}^2-(0,0)$ موضعاً پایستار است. ۳ در نتیجه انتگرال میدان F روی هر دو خمی که با حرکات پیوسته در $\mathbb{R}^2-(0,0)$ به هم تبدیل می‌شوند برابر است. ۱ حال انتگرال F را روی بیضی پیشنهاد شده محاسبه می‌کنیم

$$C: \quad \gamma(t) = (\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t), \quad \gamma'(t) = (-\sin t, \tfrac{1}{2}\cos t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

۲

$$\left(x^2+4y^2 = \cos^2 t + 4(\tfrac{1}{2}\sin t)^2 = 1\right)$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + 4(\frac{1}{2}\sin t)^2}\left(-\tfrac{1}{2}\sin t, \cos t\right)\cdot\left(-\sin t, \tfrac{1}{2}\cos t\right) dt$$

۲

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin^2 t + \tfrac{1}{2}\cos^2 t\right) dt = \pi$$

۱

با توجه به اینکه دایره واحد و این بیضی (هر دو با جهت مثلثاتی) را می‌توان با حرکات پیوسته در $\mathbb{R}^2-(0,0)$ به هم تبدیل کرد

$$\int_{\text{دایره واحد با جهت مثلثاتی}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \pi$$

۱

۴. فرض کنید $g(u,v)$ تابعی هموار باشد و قرار دهید

$$G(x,y,z)=(zg_v(zy,x)+x,\ z^2 g_u(zy,x)+x,\ g(zy,x)+zyg_u(zy,x))$$

الف. $\operatorname{curl} G$ را محاسبه کنید.

$$P = zg_v(zy,x)+x$$
$$Q = z^2 g_u(zy,x)+x$$
$$R = g(zy,x)+zy\,g_u(zy,x)$$

$$\operatorname{curl} G = \det\begin{bmatrix} i & \partial_x & P \\ j & \partial_y & Q \\ k & \partial_z & R \end{bmatrix}$$

$$=(R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y)$$

۴

$$\left.\begin{aligned} R_y &= zg_u(zy,x)+zg_u(zy,x)+zy(zg_{uu}(zy,x)) \\ Q_z &= 2zg_u(zy,x)+z^2y\,g_{uu}(zy,x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_y-Q_z=0$$

۲

$$\left.\begin{aligned} P_z &= g_v(zy,x)+z(y\,g_{vv}(zy,x)) \\ R_x &= g_v(zy,x)+zy\,g_{uv}(zy,x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_z-R_x=0$$

۲

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= z^2 g_{uv}(zy,x)+1 \\ P_y &= z^2 g_{vu}(zy,x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_x-P_y=1$$

۲

$$\Rightarrow \operatorname{curl} G(x,y,z)=(0,0,1)$$

این قسمت برای (ج) مفید است.

این نشان می‌دهد که قسمت عمده میدان G باید پایستار باشد. با یک بررسی ساده می‌توان دید که

$$h(x,y,z)=zg(zy,x)+\frac{x^2}{2}$$

$$\nabla h=(zg_v(zy,x)+x,\ z^2g_u(zy,x),\ g(zy,x)+zyg_u(zy,x))$$

بنابراین

$$G=\nabla h+\tilde{G} \quad : \quad \tilde{G}(x,y,z)=(0,x,0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{curl} G=\cancel{\operatorname{curl}\nabla h}^{\,0}+\operatorname{curl}\tilde{G}=(0,0,1)$$

ب. اگر D ناحیه‌ای مسطح در $\mathbb{R}^3$ با مساحت A و بردار نرمال N باشد $\int_{\partial D} G \bullet dr$ را حساب کنید.

طبق قضیه استوکس (کرل) داریم:

$N=(a,b,c)$

$$\int_{\partial D} G.dr = \int_D \text{curl}\, G \bullet N \, dS$$

8

با محاسبات قبلی از N

$$= c \int_D dS = cA$$

2

پس این انتگرال برابر است با A ضرب در مولفه سوم بردار N

ج. انتگرال $\int_C G \bullet dr$ را برای خم C با پرمایش زیر محاسبه کنید. (راهنمایی: G جمع یک میدان پایستار با یک میدان ساده است.)

$$\gamma(t) = (at, \cos t, \sin t) \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_C G.dr = \int_C \nabla h . dr + \int_C \tilde{G} \bullet dr$$

4 یافتن این تجزیه

$$\int_C \nabla h . dr \overset{2}{=} h(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) - h(\gamma(0)) = g(0, \tfrac{a\pi}{2}) + \frac{a^2\pi^2}{8} - 0 - 0$$

$$= g(0, \tfrac{a\pi}{2}) + \frac{a^2\pi^2}{8}$$ 1

$$\dot{\gamma}(t) = (a, -\sin t, \cos t) \qquad \tilde{G}(\gamma(t)) = (0, at, 0)$$

$$\int_C \tilde{G}.dr \overset{1}{=} \int_{t=0}^{\pi/2} (0, at, 0).(a, -\sin t, \cos t)\, dt = a\int_{t=0}^{\pi/2} -t \sin t \, dt$$

$$= -a\int_{t=0}^{\pi/2} \cos t \, dt + a\left[\cancel{t \cos t}\right]_0^{\pi/2} = -a$$ 1

$$\Rightarrow \int_C \vec{G}.\vec{dr} = g(0, \tfrac{a\pi}{2}) + \frac{a^2\pi^2}{8} - a$$