به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

حل مسائل امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۹۵/۱۰/۳۰

سؤال ۱: (الف) قرار می‌دهیم $u = \tan^{-۱}(\sqrt{x})$ و $dv = dx$. در این صورت $du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱+x)}dx$ و می‌توانیم فرض کنیم $v = x$. در نتیجه

$$\int \tan^{-۱}(\sqrt{x})dx = x\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲}\int \frac{\sqrt{x}}{۱+x}dx.$$

حال اگر $t = \sqrt{x}$، آنگاه $x = t^۲$ و لذا $dx = ۲tdt$. پس

$$\begin{aligned}\int \tan^{-۱}(\sqrt{x})dx &= x\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - \frac{۱}{۲}\int \frac{t}{۱+t^۲}(۲tdt)\\ &= x\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - \int \frac{t^۲}{۱+t^۲}dt\\ &= x\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - \int dt + \int \frac{۱}{۱+t^۲}dt\\ &= x\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - t + \tan^{-۱} t + C\\ &= x\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \tan^{-۱}(\sqrt{x}) + C\\ &= (۱+x)\tan^{-۱}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

(ب) اگر $x = ۳\tan t$، آنگاه $dx = ۳(۱+\tan^۲ t)dt$ و لذا

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{۹+x^۲}}{x^۴}dx &= \int \frac{\sqrt{۹+۹\tan^۲ t}}{۳^۴\tan^۴ t}\big(۳(۱+\tan^۲ t)dt\big)\\ &= \int \frac{\frac{۳}{\cos t}}{۳^۴\frac{\sin^۴ t}{\cos^۴ t}}\left(\frac{۳}{\cos^۲ t}dt\right)\\ &= \frac{۱}{۹}\int \frac{\cos t}{\sin^۴ t}dt.\end{aligned}$$

حال با فرض $u = \sin t$ به دست می‌آوریم $du = \cos tdt$، پس

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{۹+x^۲}}{x^۴}dx &= \frac{۱}{۹}\int \frac{۱}{u^۴}du\\ &= -\frac{۱}{۲۷}\frac{۱}{u^۳} + C\\ &= -\frac{۱}{۲۷}\frac{۱}{\sin^۳ t} + C\\ &= -\frac{۱}{۲۷}\frac{۱}{\sin^۳(\tan^{-۱}(\frac{x}{۳}))} + C\\ &= -\frac{۱}{۲۷}\left(\frac{\sqrt{۹+x^۲}}{x}\right)^۳ + C.\end{aligned}$$

(ج) می‌نویسیم

$$\frac{x^۲ - ۲x - ۱}{(x-۱)^۲(x^۲+۱)} = \frac{A}{(x-۱)^۲} + \frac{B}{x-۱} + \frac{Cx+D}{x^۲+۱}$$

و به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} B + C = ۰\\ A - B - ۲C + D = ۱\\ B + C - ۲D = -۲\\ A - B + D = -۱\end{cases}$$

که این نیز ایجاب می‌کند $A = -۱$، $B = ۱$، $C = -۱$ و $D = ۱$. پس

$$\frac{x^۲ - ۲x - ۱}{(x-۱)^۲(x^۲+۱)} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} + \frac{۱}{x-۱} + \frac{-x+۱}{x^۲+۱}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^۲ - ۲x - ۱}{(x-۱)^۲(x^۲+۱)}dx &= \int \frac{-۱}{(x-۱)^۲}dx + \int \frac{۱}{x-۱}dx\\ &\quad + \int \frac{-x+۱}{x^۲+۱}dx\end{aligned}$$

$$= \frac{۱}{x-۱} + \ln|x-۱| - \frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۱) + \tan^{-۱} x + C. \blacksquare$$

سؤال ۲: با توجه به فرض می‌توانیم بنویسیم

$$\int_۰^۱ (f(x) - x)dx = \int_۰^۱ f(x)dx - \int_۰^۱ xdx = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۰.$$

از طرفی دیگر، چون f تابعی پیوسته است پس بنابر قضیهٔ مقدار میانی برای انتگرال، $c \in [۰, ۱]$ موجود است طوری که

$$\int_۰^۱ (f(x) - x)dx = (۱ - ۰)(f(c) - c) = f(c) - c.$$

در نتیجه $f(c) - c = ۰$ و لذا $f(c) = c$. $\blacksquare$

سؤال ۳: (الف) مثلث داده شده از تقاطع دو خط به معادلات $y = x - ۱$ و $y = -x + ۳$ با محور x به دست می‌آید. پس در واقع می‌خواهیم حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به محور x و زیر منحنی تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x - ۱ & : ۱ \le x \le ۲\\ -x + ۳ & : ۲ \le x \le ۳\end{cases}$$

حول محور y را محاسبه کنیم. حجم این جسم، V، نیز برابر است با

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_1^3 xf(x)dx \\
&= 2\pi\left(\int_1^2 xf(x)dx+\int_2^3 xf(x)dx\right) \\
&= 2\pi\left(\int_1^2 x(x-1)dx+\int_2^3 x(-x+3)dx\right) \\
&= 2\pi\left(\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2+\left(\frac{-1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_2^3\right) \\
&= 2\pi\left(\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-9+\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{-8}{3}+6\right)\right) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

(ب) با استفاده از قاعدهٔ زنجیری و قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$f'(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(2x\sqrt{5x^6+2x^2}\right).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
1+f'(x)^2 &= 1+\frac{5}{4}\left(4x^2(5x^6+2x^2)\right) \\
&= 1+25x^8+10x^4 \\
&= (1+5x^4)^2.
\end{aligned}$$

پس طول منحنی مطلوب از $x=1$ تا $x=2$، L، برابر است با

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx \\
&= \int_1^2 (1+5x^4)dx \\
&= (x+x^5)\Big|_1^2 \\
&= (2+32)-(1+1) \\
&= 32. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

سؤال ۴: حد مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(i-1)^2}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{6}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

سؤال ۵: (الف) برای راحتی قرار می‌دهیم $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$. پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_nها مثبت‌اند.

ابتدا همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

را بررسی می‌کنیم. اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

در نظر بگیریم، آنگاه

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0.$$

این نیز نتیجه می‌دهد که f تابعی اکیداً نزولی است و لذا برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f(n+1)<f(n)$ یا $a_{n+1}<a_n$. یعنی اینکه دنبالهٔ (a_n)، دنباله‌ای نزولی است. هم‌چنین،

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=0.
\end{aligned}$$

پس بنابر آزمون سری‌های متناوب، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

حال همگرایی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

را بررسی می‌کنیم. سری مذکور، بنابر آزمون مقایسهٔ حدی واگراست، زیرا سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست و

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

در نتیجه، سری داده شده همگرای مشروط است.

(ب) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n=\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{-n}.$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_nها مثبت‌اند. چون

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}-1\right)^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-1\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{e-1} < 1,$$

پس بنابر آزمون ریشه، سری داده شده همگرای مطلق است.

(ج) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = \frac{1}{(n\ln n)\sqrt{\ln(\ln n)}} \qquad (n \geq 3).$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که a_nها مثبت‌اند.
اکنون تابع $f : [3, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = \frac{1}{(x\ln x)\sqrt{\ln(\ln x)}}$$

در نظر می‌گیریم. به وضوح f تابعی مثبت، پیوسته و نزولی است. برای $a \geq 3$، انتگرال

$$\int_{3}^{a} f(x)dx = \int_{3}^{a} \frac{1}{(x\ln x)\sqrt{\ln(\ln x)}}dx$$

را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، اگر $\sqrt{\ln(\ln x)} = u$، آنگاه $\ln(\ln x) = u^2$ و لذا

$$\frac{1}{x\ln x}dx = 2udu.$$

در نتیجه

$$\int_{3}^{a} f(x)dx = \int_{\sqrt{\ln(\ln 3)}}^{\sqrt{\ln(\ln a)}} \frac{2u}{u}du$$

$$= 2\left(\sqrt{\ln(\ln a)} - \sqrt{\ln(\ln 3)}\right).$$

پس

$$\lim_{a\to\infty} \int_{3}^{a} f(x)dx = \infty$$

و در نتیجه، بنابر آزمون انتگرال، سری داده شده واگراست.

(د) برای راحتی قرار می‌دهیم

$$a_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

پس سری داده شده به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد. چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4} < 1,$$

پس بنابر آزمون نسبت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا و در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق است. ■

سؤال ۶: توجه می‌کنیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1).$$

با دو بار مشتق‌گیری نسبت به x از طرفین تساوی بالا به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (-1 < x < 1),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

اکنون در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x = \frac{-1}{2}$ و سپس طرفین تساوی به دست آمده را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{16}{27},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2^{n}} = \frac{8}{27}. \blacksquare$$