به نام خدا

# امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱، گروه‌های ۲۸-۱

---

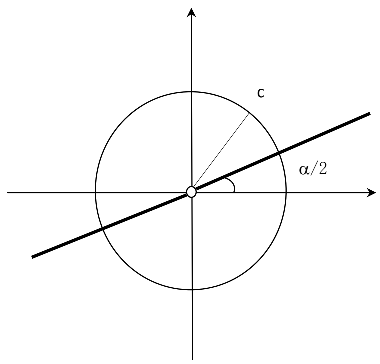
**سوال ۱:**

چون $|c| = ۱$ می‌توان نوشت $c = \cos\alpha + i\ \sin\alpha$ . فرض کنید $w = r(\cos\beta + i\ \sin\beta)$ نمایش قطبی $w$ باشد.
از رابطه‌ی $c = \frac{w}{\bar{w}}$ به‌دست می‌آید

$$\cos\alpha + i\ \sin\alpha = \cos ۲\beta + i\ \sin ۲\beta$$

پس $۲\beta = ۲k\pi + \alpha$ و در نتیجه $\beta = \frac{\alpha}{۲}\ ,\ \pi + \frac{\alpha}{۲}$ .

بنابراین مکان هندسی مورد نظر برابر است با خطی که در شکل زیر نشان داده شده است (به جز مبدا).



## سوال ۲:

$$F'(x) = e^{\cos(x+\pi)} \cdot ۱ - e^{\cos x} \cdot ۱ = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \cos(x+\pi) = \cos x$$

فقط در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ مشتق صفر می‌شود که در واقع $\cos(x+\pi) = \cos x = ۰$ .

$$F''(x) = e^{\cos(x+\pi)} \cdot (-\sin(x+\pi)) - e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

در نقاط بالا $\cos(x+\pi) = \cos x = ۰$ ، پس $F''(x) = -\sin(x+\pi) + \sin x$ در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

$$F''(k\pi + \frac{\pi}{۲}) = \begin{cases} ۲ & \text{زوج } k, \\ -۲ & \text{فرد } k \end{cases}$$

پس در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ، $k$ زوج مینی‌موم موضعی و برای $k$ فرد ماکسیمم موضعی است.

این تابع تناوبی با دوره‌ی $۲\pi$ است و پیوسته است، پس ماکسیمم و مینی‌موم خود را روی هر بازه‌ی به طول $۲\pi$ اتخاذ می‌کند.

$$F(x+۲\pi) = \int_{x+۲\pi}^{x+۳\pi} e^{\cos t}\, dt = \int_{x}^{x+\pi} e^{\cos(u-۲\pi)}\, du = \int_{x}^{x+\pi} e^{\cos u}\, du$$

**سوال ۳:**

$$\frac{-x^۳+x+۱}{x^۵+x^۴+x^۳}\equiv\frac{-x^۳+x+۱}{x^۳(x^۲+x+۱)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x^۲}+\frac{C}{x^۳}+\frac{Dx+E}{x^۲+x+۱}$$

$$Ax^۲(x^۲+x+۱)+Bx(x^۲+x+۱)+C(x^۲+x+۱)+(Dx+E)x^۳\equiv -x^۳+x+۱$$

$$\begin{cases} A+D=۰ \\ A+B+E=-۱ \\ A+B+C=۰ \\ B+C=۱ \\ C=۱ \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} D=۱ \\ E=۰ \\ A=-۱ \\ B=۰ \end{cases}$$

بنابراین داریم

$$\frac{-۱}{x}+\frac{۱}{x^۳}+\frac{x}{x^۲+x+۱}$$

$$\int\frac{-۱}{x}\,dx=-\ln x\ , \qquad \int\frac{۱}{x^۳}\,dx=(-\frac{۱}{۲})x^{-۲}$$

$$\frac{x}{x^۲+x+۱}=(\frac{۱}{۲})\,\frac{۲x+۱}{x^۲+x+۱}-(\frac{۱}{۲})\,\frac{۱}{(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}$$

$$\int(\frac{۱}{۲})\,\frac{۲x+۱}{x^۲+x+۱}\,dx=\frac{۱}{۲}\,\ln(x^۲+x+۱)$$

$$(-\frac{۱}{۲})\,\frac{۱}{(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}=(-\frac{۲}{۳})\,\frac{۱}{(\frac{۲}{\sqrt{۳}}(x+\frac{۱}{۲}))^۲+۱}$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}}(x+\frac{۱}{۲})=\tan\theta\ , \qquad \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,dx=\sec^۲\theta\,d\theta$$

$$\int(-\frac{۲}{۳})\,\frac{۱}{(\frac{۲}{\sqrt{۳}}(x+\frac{۱}{۲}))^۲+۱}\,dx=(-\frac{۲}{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})\int\frac{\sec^۲\theta}{\tan^۲\theta+۱}\,d\theta$$

$$=(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})\theta=(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})\ \tan^{-۱}\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}(x+\frac{۱}{۲})\right)=(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})\ \tan^{-۱}\left(\frac{۲x}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

یک جواب نهایی:

$$-\ln x-\frac{۱}{۲}\,x^{-۲}+\frac{۱}{۲}\,\ln(x^۲+x+۱)-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \tan^{-۱}\left(\frac{۲x}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

**سوال ۴:**

در اینجا دو نوع ناسرگی موجود است، بنابراین انتگرال را به صورت مجموع $\int_{۱}^{+\infty} + \int_{۰}^{۱}$ می‌نویسیم و جداگانه بررسی می‌کنیم:

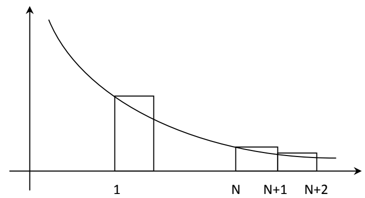
$\int_{۰}^{۱} \frac{e^{-x}}{\sqrt[۳]{x}}\, dx$ . $e^{-x}$ در $[۰, ۱]$ نزولی است، پس $\frac{e^{-x}}{\sqrt[۳]{x}} \leq \frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}$ و چون $\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}\, dx$ همگراست، $\int_{۰}^{۱} \frac{e^{-x}}{\sqrt[۳]{x}}\, dx$ همگراست.

برای $\int_{۱}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\frac{۱}{۳}}}\, dx$ چون $x^{\frac{۱}{۳}}$ در $[۱, \infty[$ نزولی است، داریم $\frac{e^{-x}}{x^{\frac{۱}{۳}}} \leq e^{-x}$ و $\int_{۱}^{+\infty} e^{-x}\, dx$ همگراست، در واقع $\int_{۱}^{A} e^{-x}\, dx = e^{-x}\Big|_{۱}^{A} = -e^{-A} + ۱$ که وقتی $A \to +\infty$ به ۱ میل می‌کند. پس $\int_{۱}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[۳]{x}}\, dx$ همگراست.

چون هردو انتگرال همگرا هستند، $\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[۳]{x}}\, dx$ همگراست.

**سوال ۵:**

اگر $S = \frac{\pi^2}{6}$ مجموع سری باشد، می‌دانیم که




$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n^2} = S - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(N+1)^2} + \underbrace{\int_{N+1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{(-\frac{1}{x})\Big|_{N+1}^{\infty}=\frac{1}{N+1}}$$

اگر $N$ را طوری بگیریم که $\frac{1}{60} > \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2}$ ، آنگاه

$$\left|\pi^2 - 6\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right| < \frac{1}{10}$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{N+2}{(N+1)^2} < \frac{1}{60}$$

$$N^2 + 2N + 1 > 60N + 120$$

$$N^2 - 58N - 119 > 0$$

ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی ۲:

$$N = 29 \pm \sqrt{841 + 119} = 29 \pm 8\sqrt{15}$$

برای $N \geq 61$ یا حدودا $N > 60$ تقریب مورد نظر حاصل می‌شود.

**سوال ۶:**

**الف)**

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \, x^n$$

$$= x + \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{a_{n-۱} + a_{n-۲}}{۲} \, x^n = x + \frac{۱}{۲} \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۱} \, x^n + \frac{۱}{۲} \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۲} \, x^n$$

$$= x + \frac{x}{۲} \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۱} \, x^{n-۱} + \frac{x^۲}{۲} \sum_{n=۲}^{\infty} a_{n-۲} \, x^{n-۲}$$

$$= x + \frac{x}{۲} \, f(x) + \frac{x^۲}{۲} \, f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - \frac{x}{۲} \, f(x) - \frac{x^۲}{۲} \, f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{۲x}{۲ - x - x^۲}$$

**ب)**

$$۲ - x - x^۲ = (x + ۲)\,(۱ - x)$$

$$\frac{۲x}{۲ - x - x^۲} = \frac{A}{۱ - x} + \frac{B}{x + ۲} = \frac{Ax + ۲A + B - Bx}{۲ - x - x^۲}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A - B = ۲ \\ ۲A + B = ۰ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{۲}{۳}\,, \quad B = -\frac{۴}{۳}$$

$$f(x) = \frac{\frac{۲}{۳}}{۱ - x} - \frac{\frac{۴}{۳}}{x + ۲} = \frac{۲}{۳} \sum_{n=۰}^{\infty} x^n - \frac{۴}{۶} \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \, (\frac{x}{۲})^n$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲}{۳} \left( ۱ - \frac{(-۱)^n}{۲^n} \right) \, x^n$$

پس تابع $f$ حول $۰$ تحلیلی است.

$$\frac{۱}{R} = \lim \sqrt[n]{\frac{۲}{۳} \left( ۱ - \frac{(-۱)^n}{۲^n} \right)} = ۱ \qquad \Rightarrow \qquad R = ۱$$

**ج)**

$$a_n = \frac{۲}{۳} \left( ۱ - \frac{(-۱)^n}{۲^n} \right)$$