امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱، گروه ۲۹

۱. حدهای زیر را حساب کنید (بدون استفاده از قاعده‌ی هوپیتال).

(آ) (۷نمره) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)$

جواب:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\,(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱)\right)=\infty$$

(ب) (۷نمره) $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\sin x\,\sin\frac{۱}{x}\right)$

جواب: حالت اول: $x\to ۰^{+}$ پس $\sin x>۰$:

$$-۱\le\sin\tfrac{۱}{x}\le ۱\ \Rightarrow\ -\sin x\le\sin x\,\sin\tfrac{۱}{x}\le\sin x$$
$$\lim_{x\to ۰^{+}}(-\sin x)=\lim_{x\to ۰^{+}}\sin x=۰\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۰^{+}}\left(\sin x\,\sin\frac{۱}{x}\right)=۰$$

حالت دوم: $x\to ۰^{-}$ پس $\sin x<۰$:

$$-۱\le\sin\tfrac{۱}{x}\le ۱\ \Rightarrow\ \sin x\le\sin x\,\sin\tfrac{۱}{x}\le-\sin x$$
$$\lim_{x\to ۰^{-}}(-\sin x)=\lim_{x\to ۰^{-}}\sin x=۰\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۰^{-}}\left(\sin x\,\sin\frac{۱}{x}\right)=۰$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\sin x\,\sin\frac{۱}{x}\right)=۰$.

۲. (۶نمره) در کدام نقاط نمودار تابع $y=f(x)=x+\sqrt[۳]{\sin x}$ دارای مماس قائم است؟

جواب:

$$f'(x)=۱+\frac{\cos(x)}{۳\sqrt[۳]{\sin^{۲}x}}$$

تابع f در نقاط $x=k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، پیوسته است و $\lim_{x\to k\pi}|f'(x)|=\infty$. بنابراین در این نقاط تابع دارای مماس قائم است.

۳. (۲۰نمره) تابع f با $f(x)=x^۷+۳x-۴$ تعریف شده است. ثابت کنید یک و تنها یک نقطه‌ی c موجود است که $f(c)=-c^۳$.

جواب: ثابت می‌کنیم معادله‌ی $f(x)+x^۳=۰$ دقیقا دارای یک ریشه است. تابع g را روی اعداد حقیقی به صورت $g(x) := f(x)+x^۳$ تعریف می‌کنیم. $g(x) = x^۷+x^۳+۳x-۴$ تابعی پیوسته روی اعداد حقیقی است و $g(۰) = -۱ < ۰$ و $g(۱) = ۱ > ۰$. پس طبق قضیّه‌ی مقدار میانی حداقل یک c در $(۰,۱)$ وجود دارد که $g(c)=۰$.

حال فرض کنید $g(x)=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز $۰ < c_۱, c_۲ < ۱$ است، پس $g(c_۱)=g(c_۲)=۰$. همچنین تابع g روی $[۰,۱]$ پیوسته و روی $(۰,۱)$ مشتق پذیر است، طبق قضیّه‌ی رول عددی مانند d در $(۰,۱)$ وجود دارد که $g'(d)=۰$. در حالی که تابع $g'(x)=x^۶+۳x^۲+۳$ روی $(۰,۱)$ همواره مثبت است که با نتیجه‌ی قبل در تناقض است. بنابراین $g(x)=۰$ حداکثر یک ریشه در $(۰,۱)$ دارد و با توجه به نتیجه اول، $g(x)=۰$ دقیقا دارای یک ریشه در $(۰,۱)$ است.

۴. (۱۰نمره) با استفاده از مشتق ضمنی همه‌ی نقاطی روی منحنی $x^۲y^۲+xy=۲$ را پیدا کنید که شیب خط مماس بر منحنی در این نقاط برابر با -۱ است.

جواب:

$$۲xy^۲+۲x^۲yy'+y+xy'=۰ \Rightarrow y'=\frac{-y(۲xy+۱)}{x(۲xy+۱)}=\frac{-y}{x}$$

توجّه کنید که $۲xy+۱\neq ۰$ ، زیرا

$$۲xy+۱=۰ \Rightarrow xy=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲y^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{۱}{۴}\neq ۲.$$

یعنی نقاطی که برای آنها $۲xy+۱=۰$ در معادله‌ی منحنی صدق نمی‌کنند.

$$\frac{-y}{x}=-۱ \Rightarrow x=y$$

$$۰=x^۴+x^۲-۲=(x^۲-۱)(x^۲+۲) \Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow A_۱=(۱,۱)\ ,\ A_۲=(-۱,-۱)$$

۵. (۱۵نمره) تقریب خطی (خطی سازی) $f(x)=(۱+x)^{۵۰}$ را در $a=۰$ پیدا کنید و با استفاده از آن مقداری تقریبی برای $(۱/۰۰۰۲)^{۵۰}$ بیابید.

جواب:

$$f(x)=(۱+x)^{۵۰} \Rightarrow f'(x)=۵۰(۱+x)^{۴۹}$$

$$f(۰)=۱\ ,\ f'(۰)=۵۰$$

$$f(x)\approx f(۰)+f'(۰)(x-۰) \Rightarrow f(x)\approx ۱+۵۰x$$

$$(۱/۰۰۰۲)^{۵۰}=f(۰/۰۰۰۲)\approx ۱+۵۰(۰/۰۰۰۲)=۱/۰۱$$

۶. (۱۵ نمره) در میان مثلث‌های قائم‌الزاویه با طول وتر ثابت c ، کدام یک دارای بیشترین مساحت است؟ و بیشترین مساحت چه مقدار است؟

جواب:

$$x \in (0, c)\ , \qquad y = \sqrt{c^2 - x^2}\ , \qquad S(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}}$$

$S'(x)$ در تمام نقاط دامنه تعریف شده است. همچنین

$$S'(x) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - x^2} = \frac{x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} \ \Rightarrow\ c^2 - x^2 = x^2 \ \Rightarrow\ x^2 = \frac{c^2}{2} \ \Rightarrow\ x = \pm\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

بنابراین $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ تنها نقطه‌ی بحرانی تابع S در بازه‌ی $(0, c)$ است. چون

$$S\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = \frac{c^2}{4}\ , \qquad \lim_{x \to 0^+} S(x) = 0\ , \qquad \lim_{x \to c^-} S(x) = 0\ ,$$

پس تابع $S(x)$ در $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ بیشترین مقدار ممکن خود یعنی $\frac{c^2}{4}$ را اختیار می‌کند و در این حالت $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$. یعنی مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه‌ی متساوی الساقین است.

موفق باشید.